

Modelle, Strukturen und Algorithmen für stationäre Flüsse in Gasnetzen

Von der Fakultät für Mathematik

der

Universität Duisburg-Essen

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte

Dissertation

von

Claudia Stangl

aus

Duisburg

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Rüdiger Schultz
Prof. Dr. rer. nat. Alexander Martin

Tag der mündlichen Prüfung: 6. August 2014

Danksagung

Ich möchte mich bei allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe „Optimierung und algorithmische diskrete Mathematik“ der Universität Duisburg-Essen für das sehr kollegiale und freundschaftliche Arbeitsklima bedanken. Ein besonderes Dankeschön geht an unseren Chef und meinen Doktorvater Prof. Dr. Rüdiger Schultz, der mich in die Arbeitsgruppe aufgenommen hat und mir die Mitarbeit an dem sehr interessanten Projekt „Forschungskoooperation Netzoptimierung“ ermöglichte. Auf der Grundlage von Themen dieses Projekts ist meine Dissertation entstanden. Weiterhin hervorheben möchte ich meinen Kollegen Ralf Gollmer, der zu jeder Tages- und Nachtzeit auf Fragen jeglicher Art eine Antwort findet. Besonders in der Linuxwelt kennt er sich sehr gut aus und ich durfte einiges von ihm im Umgang mit dem Betriebssystem und den vielen kleinen helfenden Tools lernen.

Vielen Dank an meine Kollegen Matthias Claus und Tobias Wollenberg, die mir durch lange Diskussionen zum Thema Operatoren sehr geholfen haben.

Des weiteren möchte ich mich bei meinen Projektkollegen Benjamin Hiller, Robert Schwarz und Jonas Schweiger vom Zuse-Institut in Berlin für die mehrjährige, angenehme Zusammenarbeit bedanken. Von Ihnen konnte ich einiges über objektorientierte C++-Programmierung, über moderne Revisionskontrollsysteme und über immer wieder hilfreiche Pythonskripte lernen.

Ohne das Unternehmen „Open Grid Europe - The Gas Wheel“, welches die Forschungskoooperation initiiert hat und uns reale Netzdaten zur Verfügung gestellt hat, wäre eine Dissertation in dieser Form nicht entstanden.

Prof. Dr. Alexander Martin von der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg möchte ich für die Übernahme des Zweitgutachtens dieser Dissertation meinen Dank aussprechen.

Uwe Gotzes danke ich für das sehr gründliche und kritische Korrekturlesen dieser Arbeit.

Zusammenfassung

Ausgehend von den grundlegenden Erhaltungssätzen für Fluide, der Kontinuitätsgleichung, der Impulsgleichung und der Energiegleichung, untersuchen wir Vereinfachungen für die Modellierung von stationären Gasflüssen in Gasnetzen. Anschließend betrachten wir ein auf diesen Approximationen beruhendes Verfahren zur Bestimmung von zulässigen Flüssen und Drücken im Rahmen physikalischer, technischer und vertraglicher Restriktionen. Betrachtet man ein Gasnetz, welches aus Rohren (Kanten) und Punkten (Knoten) besteht, gelten analog zu Strom- und Wassernetzen auch beim stationären Gasfluss die Kirchhoffschen Gesetze. Das erste Gesetz besagt, dass die Summe der aus einem Knoten herausfließenden Volumenströme identisch zur Summe der hineinfließenden Volumenströme sein muss. Ist der Knoten weder eine Senke (Ausspeisepunkt) noch eine Quelle (Einspeisepunkt) handelt es sich hierbei lediglich um die Volumenströme, welche über inzidente Kanten fließen. Ist der Knoten eine Senke, so kann über ihn Gas aus dem Netz ausgespeist werden. Ist der Knoten eine Quelle, so kann Gas in das Netz eingespeist werden. Diese zusätzlichen Volumenströme müssen für die Einhaltung des ersten Kirchhoffschen Gesetzes berücksichtigt werden. Das zweite Gesetz beschreibt den Druckabfall des Gases in Kreisen. Es sagt aus, dass sich die Druckveränderung beim Durchlaufen eines Kreises zu Null addiert. Der Druckabfall resultiert aus der Reibung, die der Gasstrom an den Innenwänden der Rohre erfährt.

Im stationären Fall ergibt sich zunächst aus Vereinfachungen der Erhaltungssätze ein nicht-lineares Gleichungssystem mit Druckvariablen für Knoten und Flussvariablen für Kanten des Netzes. Aus diesem System lassen sich anschließend bei Fixierung des Druckes an einem Knoten sämtliche Druckvariablen und gewisse Flussvariablen eliminieren, sodass ein System mit gleich vielen Variablen wie Gleichungen verbleibt. Diese Anzahl entspricht der Zahl der Fundamentalkreise im Netz, d. h., der minimalen Anzahl kreisschließender Kanten. Aus dem resultierenden System von Gleichungen leiten wir mit Hilfe koerziver Operatoren Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen her.

Mit dem Ziel reale Gasnetze auf die Existenz zulässiger, stationärer Gasflüsse zu untersuchen und solche zu ermitteln, betrachten wir weitere Kantentypen. Ein Gasnetz besteht nicht nur aus Rohren, sondern zusätzlich aus Verdichterstationen, Reglern, Schiebern, Widerständen und Kurzschlüssen. Diese Elemente erfordern nicht nur die Hinzunahme neuer Nebenbedingungen, sondern auch die Einführung von Binärvariablen. Letztere modellieren, ob eine Verdichterstation, ein Regler oder ein Schieber geöffnet oder geschlossen sein soll. Unser Modell für den Druckverlust in Rohren, ebenso wie die Modellierungen von Verdichterstationen und Widerständen beinhaltet nichtlineare Komponenten. Um trotz der Binärentscheidungen ein nicht-lineares Modell nutzen zu können, welches den Druckabfall im Rohr sehr gut approximiert, nutzen wir Heuristiken zur Fixierung der Binärentscheidungen. Sind diese fixiert, erhalten wir ein nichtlineares, nichtkonvexes Modell mit Druckvariablen an allen Knoten, welche inzident zu einer Verdichterstation, einem Regler oder einem Widerstand sind sowie einer Druckvaria-

ble für den Wurzelknoten. Zusätzlich gibt es pro Fundamentalkreis eine Flussvariable für die kreisschließende Kante.

Die Entwicklung dieses Verfahrens zur Feststellung, ob ein zulässiger stationärer Gasfluss in einem gegebenen Netz existiert, ist motiviert durch die Forschungsk Kooperation Netzo Optimierung (Forne). Mitglieder dieser Kooperation sind zwei Forschungsinstitute und mehrere mathematische Arbeitsgruppen an deutschen Universitäten¹. Initiator der Forschungsk Kooperation ist der Bereich Netzplanung und -Steuerung der OGE [46] (Open Grid Europe GmbH) in Essen. Dieses Unternehmen besitzt und steuert als Erdgastransporteur das größte Ferngasleitungsnetz in Deutschland. Innerhalb der Forschungsk Kooperation gibt es grundlegende Aufgaben, an denen alle gemeinsam arbeiten und spezielle Teilaufgaben, welche von einzelnen Kooperationspartnern vertieft bearbeitet werden. So wird zum Beispiel am Zuse-Zentrum an Modellen zur Netzausbauplanung geforscht. Die Arbeitsgruppe von Werner Römisch entwickelt in Zusammenarbeit mit der Gruppe von Rene Henrion Prognose- und Reduktionsverfahren für das Ausspeiseverhalten der Gaskunden. Dank des Initiators OGE werden uns reale Netzdaten zur Verfügung gestellt. Die Ergebnisse der Forschungsk Kooperation wurden in [21] zusammengefasst und zur Veröffentlichung akzeptiert. Des Weiteren wurde eine Veröffentlichung mit dem Titel „Validation of Nominations in Gas Network Optimization: Models, Methods, and Solutions“ [48] bei Optimization Methods and Software eingereicht und publiziert. Ein Buch mit dem Titel „Evaluating Gas Network Capacities“ [32] stellt detailliert die Methoden und Modelle dar und wird bei SIAM² erscheinen .

Wir nennen die Vorgabe von zu transportierenden Gasflüssen an Quellen und Senken eine „Nominierung“. Eine grundlegende Frage für die Forschungsk Kooperation ist, ob zu einer gegebenen Nominierung ein zulässiger stationärer Gasfluss auf dem zu Grunde liegenden Netz gefunden werden kann. Um diese Frage beantworten zu können, muss ein Problem gelöst werden, welches sowohl Binärentscheidungen als auch nichtlineare Nebenbedingungen in großer Zahl enthält. Die Zustandsgleichung realer Gase, die verwendeten approximierten Lösungen der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung, welche den Druckabfall in Rohren bestimmen, sowie Bedingungen für Verdichterstationen und Widerstände sind nichtlinear. Für unseren Kooperationspartner OGE sind alle Eigenschaften wie Gastemperatur, Gasbeschaffenheit und Fließgeschwindigkeit, welche weitere nichtlineare Bedingungen erzeugen, von Bedeutung. In der Forschungsk Kooperation wird daher ein mehrstufiger Ansatz verfolgt. Es gibt ein detailliertes nichtlineares Modell, welches bei fixierten Binärentscheidungen und guten Startwerten alle Eigenschaften im Gasfluss unter Verwendung diskretisierter Differentialgleichungen berücksichtigt. Dieses Modell wird an der Leibniz Universität entwickelt ([57, 58]). In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren beschrieben und untersucht, welches Startwerte und vielversprechende Binärentscheidungen für dieses detaillierte Modell liefern kann. Dabei verwenden wir ein Dekompositionsverfahren, bei dem spezielle Teilgebiete des Netzes separat berechnet und aus

¹ Arbeitsgruppe von Thorsten Koch am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin, Arbeitsgruppe von Rene Henrion am Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Arbeitsgruppe von Alexander Martin an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Arbeitsgruppe von Marc Pfetsch an der Technischen Universität Darmstadt, Arbeitsgruppe von Marc Steinbach an der Leibniz Universität Hannover, Arbeitsgruppe von Werner Römisch an der Humboldt-Universität zu Berlin, Arbeitsgruppe von Rüdiger Schultz an der Universität Duisburg-Essen.

²Society for Industrial and Applied Mathematics [60].

dem Originalnetz geschnitten werden. Dadurch verringert sich die Dimension des verbleibenden Netzes, sodass Nominierungen auf großen Gasnetzen erfolgreicher berechnet werden können. Die Beantwortung obiger Frage, ob zu einer gegebenen Nominierung ein zulässiger stationärer Gasfluss auf dem zu Grunde liegenden Netz gefunden werden kann, ist grundlegend für weitere Aufgaben innerhalb der Forschungsk Kooperation. Sie wird als Teilaufgabe sehr oft gestellt, weshalb die schnelle Beantwortung der Frage ein weiteres Ziel des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens ist.

Motiviert durch die Kooperation befassen wir uns in dieser Dissertationsschrift sowohl mit der Entwicklung mathematisch korrekter, reduzierter Modelle als auch mit deren Anwendung auf reale Gasnetze. Diese führen durch ihre Größe in der Regel zu hochdimensionalen Problemen, welche zum aktuellen Entwicklungsstand von keinem Standardlöser erfolgreich behandelt werden können.

Im Vergleich zu den in dieser Dissertationsschrift vorgelegten Ergebnissen sind aus der veröffentlichten mathematischen, wie ingenieurwissenschaftlichen Fachliteratur keine Resultate zu Strukturen und Algorithmik für Gasnetze vergleichbarer Größe, Vielfalt und Komplexität bekannt.

Abstract

Based on the fundamental conservation laws for fluids, namely the continuity equation, the momentum equation and the energy equation, in this dissertation, we research simplifications for modelling stationary gas flow in gas networks. Thereafter, we use these approximations to develop a procedure that determines whether flows and pressures are feasible within physical, technical and contractual restrictions. Regarding a gas network consisting of pipes (edges) and points (nodes), Kirchhoff's laws analogically hold for stationary gas flow as they do for electricity and water networks. The first law ensures that the sum of flows going out of a node equals the sum of flows going into the node. If the node neither is an exit nor an entry, we're dealing with a sum of flows simply streaming over incident edges. If the node is an exit, it is possible to let gas stream out of the network. If the node is an entry, it is possible to let gas stream into the network. These additional flows must be taken into consideration when Kirchhoff's first law is observed. The second law describes the pressure loss of the gas flow within cycles. It declares that the pressure changes on the edges of the cycle must sum up to zero. The pressure loss results from the friction between the gas and the inside walls of the pipe.

In the stationary case, from simplifications of the conservation laws, initially there results a nonlinear equation system with pressure variables for nodes and with flow variables for edges of the network. By fixing the pressure on one node, it is possible to eliminate all pressure variables and certain flow variables to attain a system with as many variables as equations. This number of variables/equations coincides with the number of fundamental cycles within the network, meaning the minimum number of edges closing a cycle. We provide existence and uniqueness of solutions on the remaining equation system with the help of coercive operators. Aiming at analysing real world gas networks for the existence of feasible, stationary gas flows we have to take into consideration more types of edges. A gas network does not only consist of pipes, but also of compressor stations, control valves, valves, resistors and shortcuts. These elements do not only require the use of special constraints, but also the use of binary variables. These variables model if a compressor station, a control valve or a valve is closed or opened. Our model for the pressure loss in pipes includes nonlinearities as do the modelling of compressor stations and resistors. In order to be able to use a nonlinear model that approximates the pressure loss well in spite of binary decisions, we apply a heuristic for the fixation of those binary decisions. After the fixation, a nonlinear non-convex model remains with pressure variables on all nodes that are incident to a compressor station, a control valve or a resistor and one pressure variable for the root node. Additionally, there exists a flow variable for each fundamental cycle.

The development of a procedure to determine whether a feasible stationary gas flow exists for a given network is motivated by the cooperation “Forschungskooperation Netzooptimierung” (Forne). This cooperation consists of members of two research institutes and some mathematical work groups at German universities³.

The initiator of the cooperation is the division “Netzplanung und -Steuerung” from OGE [46] (Open Grid Europe GmbH) situated in Essen, Germany. The company owns the biggest long-distance gas network within Germany. There are basic problems which all members of the cooperation try to solve jointly. Furthermore, there are special sub tasks only some members of the cooperation are occupied more deeply with. For instance, the sub task “network extension” is tackled by the working group from Zuse-Zentrum. The team of Werner Römisch in collaboration with the working group of Rene Henrion develops techniques for forecasting the characteristics of the use of exit flows. Thanks to the initiator OGE, data of real world gas networks is provided to us. The results of the cooperation have been summarised in [21] and accepted for publication. In addition to that, a paper titled “Validation of Nominations in Gas Network Optimization: Models, Methods, and Solutions” [48] is accepted and published by Optimization Methods and Software. Furthermore, the book “Evaluating Gas Network Capacities” containing detailed explanations of methods and models will be launched by SIAM⁴.

We name the specification for gas flows to be transported from entries to exits a “nomination”. An elementary question for the cooperation is whether a feasible stationary gas flow can be found for a given nomination on a real world gas network. In order to answer this question, a problem with binary decisions and many nonlinear constraints has to be solved. The state equation for real gas, the approximated solutions for the continuity and the momentum equation as well as constraints for compressor stations and resistors are nonlinear. Our partner OGE is interested in the quality of the gas. This includes the temperature, the composition and the current velocity and induces further nonlinear constraints. Therefore, the cooperation uses a multistage approach. There is a detailed nonlinear model which is able to consider all qualities within gas flow by using discretised differential equations when fixed binary decisions and good initial values are given. This model is developed at Leibniz Universität ([57, 58]).

The aim of this dissertation is the development and research of a procedure that is able to produce initial values and fixed binary decisions for the detailed model. We apply a decomposition method to separately compute special regions of the network and remove them from the original network. Thereby, the dimension of the remaining network is reduced and nominations can even be solved on big gas networks.

The answer to the above question if it is possible to find a feasible stationary gas flow for a given nomination on a real world gas network is basic for further questions. It is asked very frequently as a sub task and, therefore, it is important to provide the answers quickly. Accordingly, this is an additional intention of the presented procedure in this paper.

³ Working group of Thorsten Koch at “Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik” in Berlin, working group of Rene Henrion at “Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik”, working group of Alexander Martin at “Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg”, working group of Marc Pfetsch at “Technische Universität Darmstadt”, working group of Marc Steinbach at “Leibniz Universität Hannover”, working group of Werner Römisch at “Humboldt-Universität zu Berlin”, working group of Rüdiger Schultz at “Universität Duisburg-Essen”.

⁴ Society for Industrial and Applied Mathematics [60].

Motivated by the cooperation, this paper focuses on both the development of mathematically correct and reduced models and on applying them to real world gas networks. Due to their size, these mostly lead to high dimensional problems which can not be solved in total by any state-of-the-art-solver. There are no results known in printed mathematical or engineering specialist literature with structures and algorithms for gas networks of contrastable size, complexity and diversity in comparison with the outcomes of this dissertation.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
Zusammenfassung	iii
Abstract	vii
1. Einleitung	1
2. Modell	7
2.1. Variablenreduktion	7
2.1.1. Erläuterungen zu Druck- und Kreisgleichungen	11
2.2. Zusätzliche Nebenbedingungen und Zielfunktion	16
2.2.1. Verdichterstation	16
2.2.2. Automatisierte Regler	19
2.2.3. Stützregler	20
2.2.4. Widerstand	21
2.2.5. Flussbegrenzung	22
2.2.6. Zielfunktion	22
2.3. Zusammenfassung des Modells	23
3. Strukturen	27
3.1. Dekomposition eines Netzes mit Stützreglergebieten	27
3.1.1. Sätze und Beispiele für spezielle Stützreglergebiete	28
3.1.2. Allgemeiner Beweis	39
3.2. Koerzive Operatoren	50
3.2.1. Einführung in die Theorie	50
3.2.2. Ein Operator im Gasflussmodell für die Kreisgleichung	51
3.2.3. Ein Operator im Gasflussmodell für Stützreglergebiete	62
4. Algorithmen	69
4.1. Heuristiken zur Fixierung der Binärentscheidungen	69
4.1.1. Eine Heuristik auf Grundlage eines Netzwerkflussproblems	69
4.1.2. Heuristik mittels vorgegebener Konfigurationen	76
4.2. Zusammenspiel der Komponenten zu einem Gesamtalgorithmus	77
5. Reale Instanzen und Rechenergebnisse	81
5.1. Drei reale Netzinstanzen	81
5.1.1. H-Gas-Nord-Netz	83

5.1.2.	H-Gas-Süd-Netz	84
5.1.3.	L-Gas-Netz	86
5.1.4.	Vergleich der Netze	88
5.2.	Zwei Gruppen von Nominierungen	90
5.2.1.	Expertenominierungen	90
5.2.2.	Ergänzung statistischer Szenarien zu Nominierungen	90
5.3.	Rechenergebnisse	91
5.3.1.	H-Gas-Nord-Netz	93
5.3.2.	H-Gas-Süd-Netz	98
5.3.3.	L-Gas-Netz	100
5.3.4.	Zusammenfassung	104
6.	Einordnung in die Literatur	105
A.	Druckabfall	113
A.1.	Die Kontinuitätsgleichung	114
A.2.	Die Gasgleichung	114
A.3.	Die Impulsgleichung	114
B.	Approximationen	117
C.	Symbolverzeichnis	123
	Literaturverzeichnis	132

1. Einleitung

Die Bedeutung von Erdgas als Energielieferant Erdgas ist ein kohlenstoffhaltiges Brenngas fossilen Ursprungs. Es hat sich genau wie Erdöl vor Millionen Jahren aus abgestorbenen Meeresorganismen gebildet. Im Laufe der Zeit wurden diese mit Gesteins- und Erdschichten bedeckt und so einem höheren Druck sowie steigender Temperatur ausgesetzt. Durch diesen Prozess wurden die langkettigen Kohlenwasserstoffe der Biomasse in kurzkettige, flüssige und gasförmige Kohlenwasserstoffe aufgespalten. Diese lagerten sich so in bestimmten Gesteinsformationen ab, dass Erdöl und Erdgas entstanden. Erdgas wird wie Kohle, Erdöl, Kernenergie und Erneuerbare Energie den primären Energiequellen zugeordnet. Erdgas besitzt im Vergleich aller fossiler Brennstoffe den geringsten CO₂-Ausstoß pro Energieeinheit und ist ebenso wie Erdöl ein endlicher Rohstoff [8, 59]. Die Erdölvorkommen schrumpfen deutlich:

„Erdöl ist der einzige nicht erneuerbare Energierohstoff, bei dem in den kommenden Jahrzehnten eine steigende Nachfrage nicht mehr gedeckt werden kann.“ [5]

Die Erdgasvorkommen sind weniger verbraucht, was dazu führen wird, dass die Bedeutung von Erdgas gegenüber der von Erdöl weiter steigen wird:

„Erdgas ist aus geologischer Sicht noch in sehr großen Mengen vorhanden.“ [5]

Die ersten Erfahrungen mit Erdgas machten Menschen schon 6000 v. Chr. im Iran. Es gibt Berichte über „ewige Feuer“, welche für „göttliche Zeichen“ gehalten wurden. Bereits 900 v. Chr. wurde Erdgas zur Trocknung von Salz in China benutzt. Ebenfalls in China wurde 900 n. Chr. die erste Pipeline zum Transport von Erdgas eingesetzt. Diese bestand aus Bambusrohren. Um 1600 begann der niederländische Chemiker Jean Baptiste Helmon, sich für Erdgas zu interessieren und gab diesem seinen heutigen Namen. 1626 berichteten französische Missionare über „brennende Quellen“ in flachen Gewässern von Nordamerika. 1799 erfand Phillipe Lebon in Paris die erste Gaslampe. Ab 1802 wurde in Genua Erdgas zur Straßenbeleuchtung genutzt. Etienne Lenoir fuhr 1860 erstmals mit einem gasbetriebenen Auto von Paris nach Joinville. 1863 wurde der Gasmotor durch Nikolaus August Otto verbessert und in Deutschland eingeführt. 1910 wurde erstmals in Deutschland Erdgas gefunden. Zum Beheizen von Häusern wurde Erdgas erstmals in den 1960er Jahren benutzt und es wurde in dieser Zeit auch die Bindung des Gaspreises an den Ölpreis vorgeschrieben. 1970 wurden die ersten Importabkommen der Ruhrgas AG mit dem damals größten Erdgasexporteur, der Sowjetunion, abgeschlossen [23]. Erdgasnutzung ist auch für Privatpersonen interessant, weil der Anschluss an das Gastransportnetz durch erweiterte Leitungen immer einfacher wurde und wird. So wird Erdgas zum Heizen und als Treibstoff genutzt. In der Industrie wird Erdgas z. B. bei der Stahl- und Glasherstellung sowie bei der Trocknung von Futter und Nahrungsmitteln eingesetzt [23]. Weiterhin wird es als Rohstoff der chemischen Industrie verwendet. In Abbildung 1.1 ist die Verteilung des

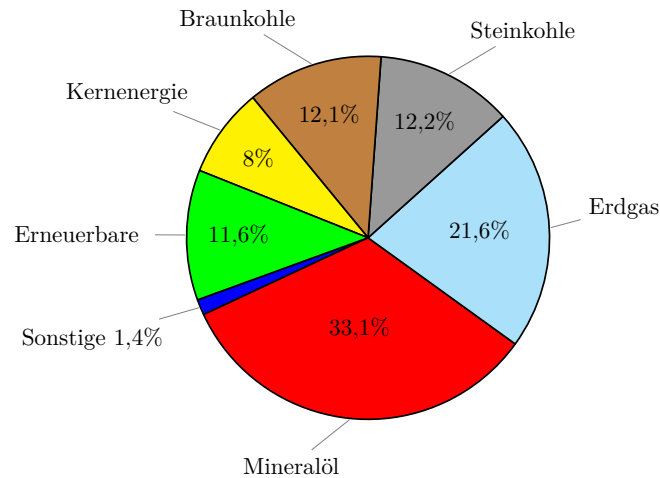


Abbildung 1.1.: Verteilung des Primärenergieverbrauchs in Deutschland 2013 [1]

Primärenergieverbrauchs in Deutschland im Jahr 2013 dargestellt. Der weltweite Erdgasverbrauch ist von 2012 gegenüber dem Vorjahr 2011 um 2,2 % angestiegen. Im Jahr 2012 wurden ca. 36×10^3 TWh Erdgas weltweit verbraucht [4].

Da Deutschland weit mehr Gas verbraucht als es selbst fördern kann, ist es auf Importe aus dem Ausland angewiesen. Diese erfolgen größtenteils durch Leitungssysteme über den Land- oder Wasserweg und zu einem geringen Teil über Schiffe mit verflüssigtem Gas [34]. Die Verteilung und Weiterleitung des Gases geschieht über große Transportnetze mit einem Rohrdurchmesser von ca. 1,6 m und parallel laufenden Leitungssträngen sowie über kleine Verteilnetze mit einem minimalen Durchmesser von 5 cm. In Abbildung 1.2 wird die Dichte der Transportmöglichkeiten von Erdgas in Europa deutlich. Bei dieser Darstellung sind keine Verteilnetze sichtbar.

Vor der Liberalisierung des Gasmarktes war es nicht möglich frei zu entscheiden, von welchem Lieferanten man sein Gas beziehen möchte. Die Belieferung mit Gas wurde von den Kommunen durchgeführt und diese bestimmten den Anbieter. Um der dadurch steigenden Preisentwicklung von Gas entgegenzuwirken und Verbraucherrechte zu stärken, wurde 1998 der bundesdeutsche Energiemarkt für den freien Wettbewerb geöffnet. Da es für potenzielle neue Gasanbieter unmöglich ist, ein neues Transportsystem in die Erde zu legen, änderte sich für die Kunden nach Einführung des Gesetzes wenig. Es gab an einem Ort jeweils nur genau einen Anbieter. Die Gasunternehmen hatten sich auf festgelegte Gebiete, welche sie versorgen geeinigt und konkurrierten nicht gegenseitig. Von potenziellen neuen Anbietern verlangten sie sehr hohe Gebühren für die Nutzung der vorhandenen Netze [67]. Ohne eine Regulierungsbehörde, welche Grundlagen für einen gerechten Netzzugang definierte, konnte sich keine Liberalisierung des Gasmarktes durchsetzen. So wurde 2005 die Bundesnetzagentur gegründet, welche diese Grundlagen bestimmen soll. Erst im Jahr 2006 wurde es für Privatkunden möglich, ihren Gasanbieter zu wechseln, was deutlich zur Liberalisierung des Gasmarktes beitrug [19].

Traditionell wurde der Gastransport in Europa von Unternehmen durchgeführt, die auch das Monopol für den Gashandel hatten. Um Erdgas zu transportieren, benötigt man eine sehr teure Infrastruktur in Form eines Leitungssystems. Um die großen Investitionen, die beim Bau eines

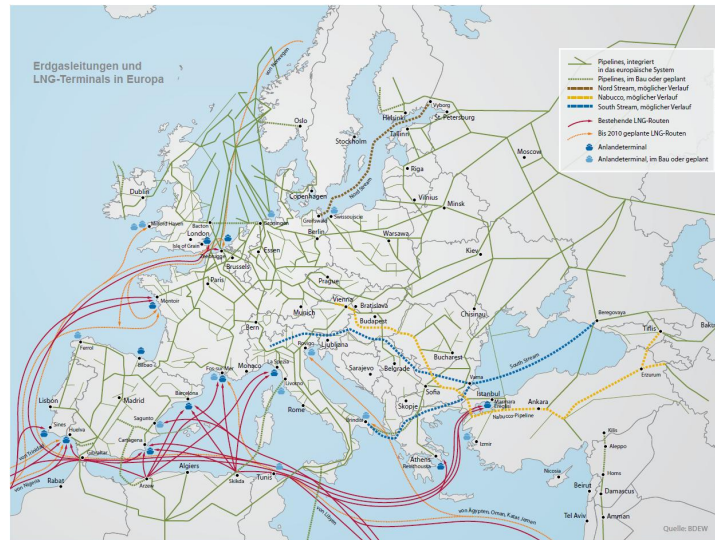


Abbildung 1.2.: Erdgastransportleitungen und LNG Terminals in Europa 2009 [30].

Leitungssysteme nötig sind, über die Zeit und die Kunden zu verteilen, wurden langfristige Lieferverträge von bis zu 20 Jahren abgeschlossen. Dies war wegen der Monopolstellung und der Kopplung von Gashandel und Gastransport möglich [64]. Durch langfristige Verträge konnte das integrierte Energieversorgungsunternehmen die transportierten Flüsse auf den genutzten Leitungsabschnitten und konnte das Netz gezielt auf diesen Bedarf hin auf- und ausbauen. Im Jahr 2009 wurde das dritte Binnenmarktpaket zur Strom- und Gasmarktliberalisierung der EU mit dem wesentlichen Ziel der Trennung von Energienetzbetrieb, Energieversorgung und Energieerzeugung verabschiedet. Heute müssen sich die Gastransportunternehmen an die Richtlinien ihrer nationalen Regulierungsbehörde halten. In Deutschland fordert die Bundesnetzagentur beispielsweise:

„Die Fernleitungsnetzbetreiber und die Betreiber nachgelagerter Netze haben bei der Kapazitätsberechnung und der Durchführung von Lastflusssimulationen mit dem Ziel zusammenzuarbeiten, die technischen Kapazitäten zu maximieren.“
[6, §9 Absatz 2]

Dies bedeutet für Gastransportunternehmen, dass sie mit Hilfe ihrer Simulationstechniken ein Maximum an nominierbaren Kapazitäten an allen Senken¹ und Quellen² bestimmen müssen.

„Technische Kapazität ist das Maximum an fester Kapazität, das der Netzbetreiber unter Berücksichtigung der Systemintegrität und der Erfordernisse des Netzbetriebs Transportkunden anbieten kann.“ [6, §2 Absatz 13]

¹Knoten im Netz, an denen Gas ausgespeist wird.

²Knoten im Netz, an denen Gas eingespeist wird.

Gleichzeitig muss gewährleistet sein, dass jede Nominierung³ innerhalb der ausgewiesenen Kapazitäten durchs Netz transportiert werden kann. Andernfalls drohen dem Transportunternehmen Strafzahlungen an den Kunden, dessen Nominierung nicht eingehalten werden konnte. Durch die Einführung der Bundesnetzagentur und der Gesetze zur Entkopplung von Handel und Transport wird ein Wandel in der Bedeutung von Verträgen zwischen Gastransporteur, -lieferant und -abnehmer vollzogen. Früher wurde sowohl der Gastransport als auch der Gas-handel von integrierten Energieversorgungsunternehmen durchgeführt. Handel und Transport konnten daher individuell aufeinander abgestimmt werden. Heute gibt es Verträge zwischen den Gastransportunternehmen und deren Kunden, welche eingehalten werden müssen. Die Mehrzahl der Verträge sind „Frei zuordenbare Kapazitäten“, bei denen man entweder Kapazitäten an einer Quelle oder einer Senke bucht. Um auch bei Nutzung dieser Vertragsart eine ausgeglichene Bilanz im Transportnetz zu erhalten, wurden virtuelle Handelspunkte⁴ und Bilanzkreise⁵ eingeführt.

Gliederung der Dissertationsschrift Ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist es, mit Hilfe von mathematischen Modellen stationäre Gasflüsse abzubilden, um eine Antwort auf folgende Frage zu finden:

„Ist es möglich, einen bestimmten Gasvolumenfluss von festgelegten Quellen zu festgelegten Senken zu transportieren?“

Das Gas wird an den Einspeisepunkten des Netzes vom angrenzenden Netzbetreiber innerhalb eines festgelegten Mindest- und Maximaldruck übergeben und darf an vielen Stellen im Netz ein vorgegebenes Druckintervall nicht verlassen. Durch Letztes werden Verträge eines Kunden an einer Senke modelliert, welche einen geforderten Mindest- und Maximaldruck festlegen. Gas fließt von hohem zu niedrigem Druck und verringert beim Transport durch Reibung mit den Leitungswänden seinen Druck, welcher in Verdichterstationen wieder erhöht werden kann. Strömt Gas von Gebieten mit hohem Druck in Gebiete, in welchen nur niedrigerer Druck zugelassen ist, werden Regler benötigt. Zum Leiten des Gases in bestimmte Netzteile oder zum Absperrern einzelner Netzabschnitte werden Schieber genutzt. Im Anhang B werden alle Netzelemente mit ihren Eigenschaften dargestellt. Im Anschluss sind vereinfachende Annahmen angegeben, welche wir für die Modellierung des Gasflussproblems gewählt haben.

Das Gasnetz, welches aus verschiedenen Kantentypen und Knotentypen besteht, betrachten wir als gerichteten Graph, auf dem wir ein nichtlineares Problem lösen, welches auf einem Netzwerkflussproblem aufbaut. Im Lehrbuch [10] werden Netzwerkflussprobleme als eine spezielle Form von LPs (lineare Programme) vorgestellt. Es soll die günstigste Möglichkeit gefunden werden, Mengeneinheiten⁶ über ein definiertes Netz aus Kanten und Knoten von vorgegebenen Startknoten zu Zielknoten zu transportieren. Die Kanten haben begrenzte Kapazitäten sowie Kosten pro Mengeneinheit. An jedem Knoten gilt, dass die Differenz ankommender Mengen über die Kanten und abgehender Mengen gleich der Nachfrage an dem Knoten ist. In Kapitel

³Geforderter bzw. gelieferter Volumenfluss zu einem bestimmten Zeitpunkt, der innerhalb der ausgewiesenen Kapazitäten liegen muss.

⁴Siehe Definition in [6, §2 Absatz 15].

⁵Siehe Definition in [6, §2 Absatz 4].

⁶Je nach Anwendung können unterschiedliche Mengen zu Grunde liegen (z. B. Güter, Personen, Fahrzeuge).

19 des Lehrbuchs wird die Netzwerk-Simplex Methode eingeführt, mit deren Hilfe Netzwerkflussprobleme effizient gelöst werden können.

In Kapitel 2 modellieren wir das Gastransportproblem als Zulässigkeitsproblem, bei dem wir keine Kosten auf Kanten betrachten. Die Bilanzbedingung für den Gasfluss an jedem Knoten muss auch in unserem Problem eingehalten werden. Den Druckverlust über ein Rohr modellieren wir durch eine nichtlineare, nichtkonvexe Funktion in den Variablen p_u (Eingangsdruck in bar), p_v (Ausgangsdruck in bar) und q_e (Normvolumenstrom in $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$), wobei gilt $e = (u, v)$. Die Herleitung dieser Funktion wird im Anhang A durchgeführt. Der stationäre Gasfluss genügt den Kirchhoffschen Gesetzen. Das erste Gesetz wird durch die Einhaltung der Bilanz an jedem Knoten erfüllt. Das zweite Gesetz, welches den Druckabfall des Gases in Kreisen beschreibt, entspricht der in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Kreisgleichung (2.16). Sie besagt, dass in jedem Kreis die Summe der Druckveränderungen über die Kanten des Kreises gleich Null sein muss. Der Druckverlust in einem Widerstand kann⁷ ebenfalls eine nichtlineare, nichtkonvexe Funktion in den Variablen p_u, p_v und q_e sein. Ein automatisierter Regler hat bei vorwärts durchströmendem Gas ein kontinuierliches Arbeitsfeld und kann den Druck beliebig verringern. Eine Verdichterstation besteht aus verschiedenen Verdichtermaschinen, die in bestimmten Konfigurationen parallel oder seriell hintereinander geschaltet werden können. Pro Verdichter gibt es ein zulässiges Arbeitsfeld, welches einer nichtkonvexen Menge ohne den Koordinatenursprung entspricht. In Kapitel 2.2 werden die Nebenbedingungen der verschiedenen Elemente besprochen. Zusätzlich zu den elementspezifischen Nebenbedingungen gibt es unabhängig vom Typ der Kante Flussbegrenzungen aus technischen, physikalischen oder vertraglichen Gründen⁸. Abgeschlossen wird das Kapitel mit einer Zusammenfassung des Modells in Abschnitt 2.3.

Wir fassen Verdichterstationen, automatisierte Regler und Schieber unter dem Begriff „schaltbare Elemente“ zusammen. Schaltzustand nennen wir die Entscheidung, ob ein schaltbares Element geöffnet oder geschlossen ist.

Im ersten Teil des Kapitels 3 „Strukturen“ behandeln wir eine spezielle Netzstruktur, welche in realen Netzen auftritt. Die hier untersuchten Gebiete zeichnen sich dadurch aus, dass mehrere Stützregler ein Teilnetz aufspeisen, welches keine schaltbaren Elemente enthält. Wir beweisen, dass die Volumenströme, welche über die Stützregler in das Gebiet hineinfließen, eindeutig bestimmt werden können, wenn die Ein- und Ausspeisungen innerhalb des Gebietes fixiert sind und weitere Annahmen gelten. Dieser Beweis ermöglicht die Dekomposition des Netzes in seine Stützreglergebiete und das restliche Netz sowie die separate Behandlung dieser Teilnetze. Die geforderten Voraussetzungen werden bei dem uns vorliegenden realen Netz mit Stützreglergebieten erfüllt. Im zweiten Teil untersuchen wir das System der Druckveränderungen auf eindeutigen Wegen vom Wurzelknoten zu den übrigen Knoten (2.14) sowie das System des Druckgleichgewichts in allen Kreisen (2.16). Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen des letztgenannten Systems. Hierzu betrachten wir Netze, welche nur aus Rohren, Knoten und Kurzschlüssen bestehen. Diese nennen wir passive Teilnetze. Als Ergebnis erhalten wir den Fluss auf allen Kanten. Fixieren wir zusätzlich den Druck am Wurzelknoten, können wir für beide Systeme die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beweisen. Dies bedeutet, dass sowohl der Druck an allen Knoten als auch der Fluss auf allen Kanten eindeutig

⁷Je nach Typ des Widerstands. Siehe Abschnitt 2.2.4.

⁸Ein Beispiel ist der Lärmschutz.

bestimmt werden kann. Den Beweis führen wir mit Hilfe von koerziven Operatoren. Hierzu wird am Beginn des Kapitels 3.2 eine Einführung in die entsprechende Theorie gegeben.

In Kapitel 4 „Algorithmen“ wird das in Kapitel 2 entwickelte Modell zusammen mit der in Abschnitt 3.1 bewiesenen Dekomposition zu einem Verfahren kombiniert. Zu diesem Verfahren gehört die Fixierung der Binärentscheidungen, mit denen wir die Schaltzustände schaltbarer Elemente modellieren. In realen Netzen gibt es Gruppen solcher Elemente, für welche nicht alle theoretisch möglichen Kombinationen von Schaltzuständen erlaubt sind. Diese Gruppen werden bei der Netzwerkfluss-Heuristik zur Fixierung der Binärentscheidungen genutzt, welche in Abschnitt 4.1.1 eingeführt wird. Die Gruppen verringern die Zahl der Kombinationsmöglichkeiten teilweise enorm. Es gibt z. B. in den uns vorliegenden realen Netzen eine Gruppe, welche aus elf schaltbaren Elementen besteht. Von den theoretisch möglichen $2^{11} = 2048$ Kombinationen sind in der Realität nur zwölf auswählbar. Die modelltechnische Abbildung der möglichen Schaltzustände wird in dem hier vorgestellten Verfahren nicht explizit durch Binärvariablen realisiert, sondern durch eine a priori Fixierung der Schaltzustände. Dies geschieht entweder durch Entscheidungsregeln für die Netzwerkfluss-Heuristik oder durch vorgegebene Konfigurationen (siehe Abschnitt 4.1.2). Wir erhalten somit ein nichtlineares, nichtkonvexes Optimierungsproblem mit a priori zu fixierenden Binärvariablen.

Das Kapitel 5 „Reale Instanzen und Rechenergebnisse“ beschreibt drei uns vorliegende, reale Netzinstanzen und unterschiedliche Gruppen von Nominierungen, welche wir mit dem hier entwickelten Verfahren auf Zulässigkeit prüfen wollen. In Abschnitt 5.3 werden die Ergebnisse getrennt nach Netztyp und Art der Nominierung diskutiert.

In Kapitel 6 wird ein Überblick über die veröffentlichten Ergebnisse zur Behandlung von stationärem Gasfluss gegeben. Weltweit wurde und wird zu diesem Thema mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten geforscht. Ein Schwerpunkt ist die korrekte Behandlung der Rohrphysik, ein anderer die Modellierung der Verdichterstationen oder die Bestimmung der Binärentscheidungen. In der vorliegenden Dissertationsschrift wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem sowohl Binärentscheidungen berücksichtigt werden als auch Nichtlinearitäten bei der approximierten Druckabfallgleichung für Rohre sowie bei Verdichterstationen und speziellen Typen von Widerständen. Es werden weitere Kantentypen betrachtet und das hier entwickelte Verfahren wird auf realen Netzen getestet. Ziel ist es, eine genügend genaue Approximation zu finden, damit die Zulässigkeit von Nominierungen auf realen Netzen entschieden werden kann. Die gefundenen Lösungen sollen in einem Simulator verifiziert werden können. Bei der Literaturrecherche liegt ein Fokus auf den betrachteten Netzen und Kantentypen sowie auf der Behandlung von Binärentscheidungen. Im Vergleich zu der vorliegenden Dissertationsschrift konnte keine Literatur gefunden werden, bei der sowohl viele unterschiedliche Kantentypen und Binärentscheidungen als auch Nichtlinearitäten berücksichtigt wurden. In Kapitel 6 werden daher zum Vergleich die in der Literatur verwendeten Netzelementtypen sowie die Netzgröße angegeben, sofern es Angaben dazu gibt.

2. Modell

Zu gegebener Nominierung sollen bei Einhaltung alle Druck- und Flussnebenbedingungen (siehe Zusammenfassung in Abschnitt 2.3) Gasflüsse auf allen Kanten, Drücke an allen Knoten und Schaltzustände¹ für alle schaltbaren Elemente gefunden werden.

Eine Nominierung gibt für jeden Ein- und Ausspeiseknoten einen gelieferten bzw. geforderten Gasvolumenstrom an. Die Summe der von den Quellen eingespeisten Volumenströme muss identisch sein zur Summe der von den Senken geforderten Volumenströme. Wir betrachten in der gesamten Dissertationsschrift Volumenströme unter Normbedingungen (Normvolumenstrom/Normvolumenfluss) in m^3h^{-1} , sofern keine anderen Angaben gemacht werden. Die Normbedingungen werden in der DIN 1343 festgelegt. Der Normdruck beträgt 1,01325 bar und die Normtemperatur beträgt 0°C (siehe in [8, Abschnitt 2.1.1]).

Das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren beruht auf der Reduktion der Variablen² und einer a priori Fixierung der Schaltzustände von schaltbaren Elementen. Wir nennen eine Kante vom Typ Verdichterstation, automatisierter Regler, Stützregler oder Widerstand ein „aktives Element“. Die Anzahl der Variablen, die zu Drücken an Knoten gehören wird auf die Anzahl der Knoten reduziert, die inzident zu einem aktiven Element sind. Die Anzahl der Variablen, die zu Flüssen auf Kanten korrespondieren, wird auf die Anzahl der Kreise im Netz nach Entfernen aller geschlossenen Elemente reduziert.

Das Problem des Gastransports von den Lieferanten zu den Abnehmern ist durch die zeitliche Veränderung von Ein- und Ausspeisungen ein dynamisches Problem. Diesen Aspekt vernachlässigen wir und betrachten den stationären Zustand, der sich einstellt, wenn man die Ein- und Ausspeisungen als unveränderlich über die Zeit annimmt. In Abschnitt A wird die Druckabfallsgleichung für Rohre hergeleitet. Dort wird entsprechend in den Differentialgleichungen die Ableitung nach der Zeit als konstant Null angenommen.

2.1. Variablenreduktion

Wir gehen von einem gerichteten Graph $\tilde{G}^+ = (\tilde{V}, E^+)$ aus, welcher das zu Grunde liegende Gasnetz beschreibt. Die Menge \tilde{V} aller Knoten setzt sich zusammen aus den disjunkten Mengen \tilde{V}_- , \tilde{V}_+ , \tilde{V}_0 von Senken, Quellen und inneren Knoten. Die Menge E^+ aller Kanten setzt sich zusammen aus den disjunkten Mengen E_{Ro}^+ , E_{K}^+ , E_{W}^+ , E_{S}^+ , E_{Re}^+ , E_{SR}^+ , E_{VS}^+ von Rohren, Kurzschlüssen, Widerständen, Schiebern, automatisierten Reglern, Stützreglern und Verdichterstationen. Eine genaue Beschreibung der unterschiedlichen Kantentypen ist im Anhang B zu finden.

¹Entscheidung, ob ein schaltbares Element geöffnet oder geschlossen ist.

²Einen ähnlichen Ansatz verfolgte auch Ríos Mercado (siehe [54]).

Mit Hilfe einer der Heuristiken, welche in Abschnitt 4.1 beschrieben werden, treffen wir eine a priori Entscheidung für die Schaltzustände schaltbarer Elemente. Die Elemente in geschlossenem Zustand löschen wir aus dem Graph, sodass wir einen gerichteten Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, E)$ mit $l \geq 2$ Knoten und $l + k - z$, $k \geq 0$, $z \geq 1$ Kanten erhalten. k entspricht der Zahl der Kreise im Graph \tilde{G} und z entspricht der Zahl der Zusammenhangskomponenten. Die zugehörige Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix ist \tilde{A} . Für die Einträge der Matrix \tilde{A} gilt:

$$\tilde{A}_{il} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls Knoten } i \text{ der Kopf der Kante } l \text{ ist.} \\ -1, & , \text{ falls Knoten } i \text{ der Fuß der Kante } l \text{ ist.} \\ 0 & , \text{ falls Knoten } i \text{ nicht inzident zur Kante } l \text{ ist.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Für jede Kante, unabhängig vom jeweiligen Typ, wird ein Fluss berechnet. Wir fassen die Flussvariablen in dem Vektor q mit $l + k - z$ Komponenten zusammen. In der vorliegenden Nominierung Θ ist für jede Quelle und Senke ein Fluss $\Theta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, |\tilde{V}_+| + |\tilde{V}_-|$ vorgegeben, der ein- bzw. ausgespeist wird. Für unser Modell wird aus der Nominierung ein Vektor der Ein- und Ausspeisungen \tilde{b}_i , $i \in \tilde{V}$ nach folgender Regel gebildet:

$$\tilde{b}_i = \begin{cases} \Theta_j & , \text{ falls } j \text{ und } i \text{ der gleichen Senke entsprechen.} \\ -\Theta_j, & , \text{ falls } j \text{ und } i \text{ der gleichen Quelle entsprechen.} \\ 0 & , \text{ falls } i \text{ ein innerer Knoten ist.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Eine Nominierung muss bilanziert sein, was bedeutet, dass gleich viel Gas in Summe aus dem Netz ausgespeist wie eingespeist wird. Für \tilde{b} gilt daher $\mathbf{1}^\top \tilde{b} = 0$. Die Flusserhaltung an den Knoten lautet:

$$\tilde{A}q = \tilde{b}. \quad (2.3)$$

Nun betrachten wir den Druckabfall des Gases beim Durchströmen eines Rohres $e = (u, v)$, welcher durch eine Druckabfallsgleichung in den Variablen p_u , p_v und q_e ausgedrückt wird. Variable p_u bezeichnet den Druck am Anfang³ des Rohres, Variable p_v den Druck am Ende und Variable q_e den Normvolumenfluss über das Rohr. Die Gleichung ist nichtlinear und nicht-konvex. Ihre Herleitung und die genutzten Approximationen sowie die daraus resultierende Definition des Druckabfallskoeffizienten ϕ_e befindet sich im Anhang A.

Mit gemäß (A.15) bestimmten $\phi_e \geq 0$ erfassen wir den Druckabfall auf der Kante von Knoten u zu Knoten v durch:

$$p_u^2 - p_v^2 = \phi_e |q_e| q_e. \quad (2.4)$$

Für Rohre gilt $\phi_e > 0$ und für beliebigen anderen Kantentyp definieren wir $\phi_e := 0$. Wir nutzen die Transponierte der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix \tilde{A} , bei der jede Zeile einer Kante entspricht, um die Druckabfallsgleichungen aller Kanten als Gleichungssystem zu schreiben:

$$-\tilde{A}^\top \tilde{p}^2 - \phi |q| q = 0. \quad (2.5)$$

Hierbei bezeichnet \tilde{p}^2 den l -dimensionalen Vektor mit den Komponenten p_i^2 für alle Knoten $i \in \tilde{V}$. $\phi |q| q$ ist ein $(l + k - z)$ -dimensionaler Vektor mit den Komponenten $\phi_e |q_e| q_e$ für alle

³Eindeutig bestimmt, da wir von einem gerichteten Graph als Netzbeschreibung ausgehen.

Kanten $e \in E$. Gemäß (2.1) ergibt $-\tilde{A}^\top \tilde{p}^2$ die Differenz aus dem Quadrat des Eingangsdrucks und dem Quadrat des Ausgangsdrucks einer Kante.

Im Gleichungssystem (2.3) ist eine Gleichung redundant, da alle Spaltensummen von \tilde{A} gleich Null sind und sich wegen der Bilanziertheit der Nominierung die Summe der Komponenten von \tilde{b} zu Null addiert. Jede Gleichung ist einem Knoten zugeordnet und wir wählen den Knoten mit kleinstem Index, um seine redundante Gleichung zu löschen. Die zu diesem Knoten gehörige Zeile wird aus $(\tilde{A}|\tilde{b})$ gestrichen und wir bezeichnen die um eine Zeile reduzierte Matrix mit A und den reduzierten Vektor mit b . Der ausgewählte Knoten wird als Wurzelknoten eines aufspannenden Baumes für den Graph des Netzes gewählt. Die Knotenmenge \tilde{V} reduziert um den Wurzelknoten bezeichnen wir mit V . Die Menge der Kanten des aufspannenden Baumes bezeichnen wir mit B und nennen sie Baumkanten. Bei der Konstruktion des aufspannenden Baumes wird eine Menge N von Nichtbaumkanten bestimmt, von denen jede eineindeutig einem Fundamentalkreis des Graph zugeordnet ist. Sie besteht aus den Kanten, die nicht der Menge B hinzugefügt werden, weil andernfalls ein Kreis entstehen würde. Ein Fundamentalkreis wird gebildet, wenn man zu einem gegebenen Baum eine Kante hinzufügt. Da ein Baum kreisfrei ist, gibt es immer nur genau einen Weg innerhalb des Baums zwischen zwei Knoten. Verbindet man zwei Knoten durch einen Nichtbaumkante, so entsteht ein eindeutig definierter Fundamentalkreis. Ändert man den aufspannenden Baum des Netzes, so können sich auch die Fundamentalkreise verändern. Wir erhalten nach Streichen der zum Wurzelknoten korrespondierenden Zeile folgendes Gleichungssystem:

$$Aq = b. \quad (2.6)$$

Den Druck im Wurzelknoten nennen wir p_r . Wir bezeichnen mit p^2 den $(l-1)$ -dimensionalen Vektor mit den Komponenten p_i^2 , $i \in V$. Für den Druckabfall ergibt dies:

$$-A^\top p^2 - \phi|q|q = -p_r^2 A^\top \mathbb{1}, \quad (2.7)$$

wobei $A^\top \mathbb{1}$ ein Vektor aus den Spaltensummen von A ist. Bei einer Spaltensumme von Null ist die zur Spalte gehörende Kante nicht inzident zum fixierten Wurzelknoten. Ist sie eins, so ist der Wurzelknoten der Anfangsknoten, bei einer minus eins der Endknoten der Kante.

Bisher haben wir den Druckabfall des Gases betrachtet, der beim Durchströmen eines Rohres auftritt. Beim Fluss durch Verdichterstationen und automatisierte Regler kann der Druck des Gases aktiv innerhalb vorgegebener Grenzen verändert werden (siehe Abschnitte 2.2.1 und 2.2.2). Beim Fluss durch Stützregler oder Widerstände (siehe Abschnitte 2.2.3 und 2.2.4) verringert sich der Druck nach vorgegebenen von den Parametern des Stützreglers oder Widerstands abhängigen Gesetzen. Eine genaue Beschreibung der einzelnen Kantentypen ist im Anhang B zu finden. Wir fassen die Menge der aktiven Elemente in der Menge $E_{AE} = E_{VS} \cup E_{Re} \cup E_{SR} \cup E_W$ zusammen. Um die durch aktive Elemente hervorgerufenen Druckveränderungen modellieren zu können, subtrahieren wir von der linken Seite von (2.7) einen $(l+k-z)$ -dimensionalen Vektor d mit folgenden Komponenten:

$$d_e = \begin{cases} p_u^2 - p_v^2 & , \text{ falls } e \in E_{AE}. \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Der Zusammenhang von Eingangs- und Ausgangsdruck dieser Elemente ist nicht wie bei Rohren durch Gleichung (2.4) gegeben. Wir werden die Nebenbedingungen für Verdichterstationen, Regler und Widerstände in Abschnitt 2.2 behandeln und zu unserem Modell hinzufügen. Wir erhalten als Beschreibung der Druckveränderung beim Fluss durch Kanten beliebigen Typs folgendes Gleichungssystem:

$$-d - A^\top p^2 - \phi |q|q = -p_r^2 A^\top \mathbb{1}. \quad (2.9)$$

Begründung:

1. Angenommen u, v sind Anfangs- und Endknoten eines Rohres e , welches nicht inzident zum Wurzelknoten ist. Die zugehörige Zeile aus (2.9) entspricht dem quadratischen Druckabfall auf Rohren (2.4):

$$\begin{aligned} -d_e - (-p_u^2 + p_v^2) - \phi_e |q_e|q_e &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{mit } \phi_e > 0 \wedge d_e = 0 \text{ (Rohr)} \\ p_u^2 - p_v^2 &= \phi_e |q_e|q_e. \end{aligned}$$

2. Angenommen u, v sind Anfangs- und Endknoten eines aktiven Elements e , welches nicht inzident zum Wurzelknoten ist. Durch die zugehörige Zeile aus (2.9) wird nur eine triviale Nebenbedingung erzeugt:

$$\begin{aligned} -d_e - (-p_u^2 + p_v^2) - \phi_e |q_e|q_e &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{mit } \phi_e = 0 \wedge d_e = p_u^2 - p_v^2 \text{ (kein Rohr)} \\ -(p_u^2 - p_v^2) + p_u^2 - p_v^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Flusserhaltung, dem Druckverlust sowie den Vektoren \underline{p} und \bar{p} von Mindest- und Maximaldrücken für die Knoten aus V erhalten wir folgendes System:

$$\begin{aligned} Aq &= b \\ -d - A^\top p^2 - \phi |q|q &= -p_r^2 A^\top \mathbb{1} \\ \underline{p}^2 &\leq p^2 \leq \bar{p}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da A eine Matrix mit vollem Rang ist, besitzt sie eine Darstellung $A = (A_B, A_N)$, wobei A_B invertierbar ist und es gilt $B \cup N = E$ sowie $B \cap N = \emptyset$. Das erste Gleichungssystem in (2.10) liefert mit der Aufteilung der Kanten in Baumkanten B und Nichtbaumkanten N :

$$q_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N q_N. \quad (2.11)$$

Aus dem zweiten System von (2.10) ergeben sich nun zwei disjunkte Systeme für die Kanten aus B und N :

$$-d_B - A_B^\top p^2 - \phi_B |q_B|q_B = -p_r^2 A_B^\top \mathbb{1} \quad (2.12)$$

$$-d_N - A_N^\top p^2 - \phi_N |q_N|q_N = -p_r^2 A_N^\top \mathbb{1}. \quad (2.13)$$

Wir multiplizieren (2.12) mit der Inversen von $-A_B^\top$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
(-A_B^{-\top})(-d_B) - (-A_B^{-\top})A_B^\top p^2 - (-A_B^{-\top})\phi_B|q_B|q_B &= -(-A_B^{-\top})p_r^2 A_B^\top \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \\
A_B^{-\top} d_B + p^2 + A_B^{-\top} \phi_B|q_B|q_B &= A_B^{-\top} p_r^2 A_B^\top \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \\
p^2 + A_B^{-\top} (\phi_B|q_B|q_B + d_B) &= p_r^2 \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \\
\boxed{p^2 = p_r^2 \mathbf{1} - A_B^{-\top} (\phi_B|q_B|q_B + d_B)} & \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Setzen wir (2.14) in (2.13) ein, erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
-d_N - A_N^\top \left[p_r^2 \mathbf{1} - A_B^{-\top} (\phi_B|q_B|q_B + d_B) \right] - \phi_N|q_N|q_N &= -p_r^2 A_N^\top \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \\
A_N^\top A_B^{-\top} [\phi_B|q_B|q_B + d_B] - A_N^\top p_r^2 \mathbf{1} &= \phi_N|q_N|q_N - p_r^2 A_N^\top \mathbf{1} + d_N \\
&\Leftrightarrow \\
A_N^\top A_B^{-\top} [\phi_B|q_B|q_B + d_B] &= \phi_N|q_N|q_N + d_N. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Wir wenden (2.11) in (2.15) an und erhalten:

$$\boxed{A_N^\top A_B^{-\top} \left[\phi_B \left| A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N \right| (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N) + d_B \right] = \phi_N|q_N|q_N + d_N} \quad (2.16)$$

In den hergeleiteten Gleichungssystemen (2.14) und (2.16) ist die Variablenzahl gegenüber dem Ausgangssystem 2.10 reduziert. Es gibt nicht für jeden Knoten $u \in V$ eine Variable p_u , sondern nur für den Wurzelknoten und alle Knoten, die inzident zu einem aktiven Element sind. Das Einhalten der Drücke, welches im System (2.10) mittels der Variablengrenzen der letzten Zeile beschrieben wird, wird durch neue Nebenbedingungen gewährleistet. Diese werden aus der rechten Seite des Systems (2.14) sowie den Vektoren \underline{p}^2 und \bar{p}^2 mit Quadraten von Druckgrenzen als Komponenten erzeugt.

Durch die Darstellung (2.11) des Flusses auf Kanten in B wird die Zahl der Flussvariablen auf die Anzahl der Kreise ($|N| = k$) in G reduziert. Die Gruppe der Nebenbedingungen (2.16) sorgt für das Druckgleichgewicht auf Kreisen.

2.1.1. Erläuterungen zu Druck- und Kreisgleichungen

Die Druckgleichungen Wir betrachten das im vorhergehenden Abschnitt hergeleitete System von Druckgleichungen:

$$p^2 = p_r^2 \mathbf{1} - A_B^{-\top} (\phi_B|q_B|q_B + d_B).$$

Nach Einsetzen von (2.11) ergibt sich:

$$\boxed{p^2 = p_r^2 \mathbf{1} - A_B^{-\top} \left[\phi_B \left| A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N \right| (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N) + d_B \right]}$$

Jede Zeile des Systems korrespondiert zu dem Quadrat des Drucks in einem Knoten. Dieses wird als Druckverlust auf dem eindeutigen Weg im Baum vom Wurzelknoten bis zum Knoten der jeweiligen Zeile berechnet. Dem Wurzelknoten entspricht keine Zeile.

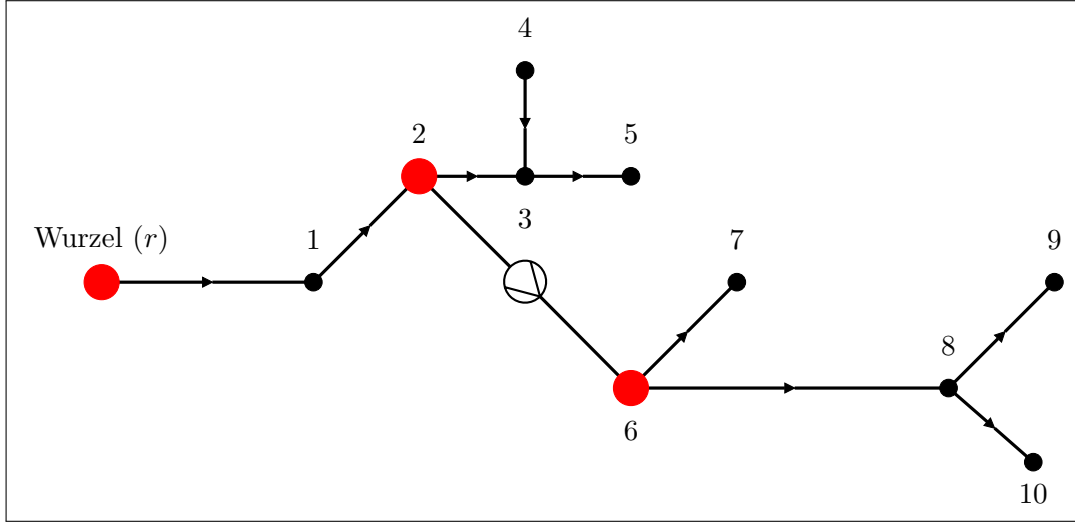


Abbildung 2.1.: Das Quadrat des Drucks an jedem Knoten wird gebildet aus dem Quadrat des Drucks am Wurzelknoten minus der Druckveränderung auf dem Weg.

In Bild 2.1 ist ein Graph mit Baumstruktur dargestellt. Die Pfeile geben die Richtung der Kante im Graph an und Kante (2,6) stellt eine Verdichterstation dar. Die Richtung der Verdichterstation im Graph ist somit von Knoten 2 zu Knoten 6. Zu allen roten Knoten existieren Druckvariablen. Exemplarisch leiten wir das Quadrat des Drucks für Knoten 4, Knoten 10, Knoten 6 und Knoten 2 her:

1.

$$\begin{aligned}
 p_4^2 &= p_r^2 - \underbrace{\phi_{r,1}|q_{r,1}|q_{r,1}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (r,1)} - \underbrace{\phi_{1,2}|q_{1,2}|q_{1,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (1,2)} - \underbrace{\phi_{2,3}|q_{2,3}|q_{2,3}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (2,3)} \\
 &+ \underbrace{\phi_{4,3}|q_{4,3}|q_{4,3}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (4,3)}.
 \end{aligned}$$

O. B. d. A. gehen wir davon aus, dass das Gas vom Wurzelknoten zu Knoten 4 strömt. Dieses besitzt im Wurzelknoten einen bestimmten Druck, welcher sich gemäß dem Druckabfallsgesetz beim Durchfluss durch die Rohre verringert. Die Vorzeichen ergeben sich aus der Matrix $A_B^{-\top}$ und entsprechen der Lage der Rohre im Baum bezogen auf den Wurzelknoten⁴. Der Fluss $q_{4,3}$ über Kante (4,3) ist für einen Fluss vom Wurzelknoten zu Knoten 4 negativ, sodass sich der Druck verringert. In Knoten 4 herrscht somit ein

⁴ $+\hat{=}$ vom Wurzelknoten weg gerichtet, $-\hat{=}$ zum Wurzelknoten hin gerichtet.

niedrigerer Druck als im Wurzelknoten.

2.

$$\begin{aligned}
p_{10}^2 = & p_r^2 - \underbrace{\phi_{0,1}|q_{r,1}|q_{r,1}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (r,1)} - \underbrace{\phi_{1,2}|q_{1,2}|q_{1,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (1,2)} - \underbrace{\phi_{6,8}|q_{6,8}|q_{6,8}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (6,8)} \\
& - \underbrace{\phi_{8,10}|q_{8,10}|q_{8,10}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (8,10)} - \underbrace{(p_2^2 - p_6^2)}_{\text{Druckveränderung durch Verdichterstation}} .
\end{aligned}$$

O. B. d. A. gehen wir davon aus, dass das Gas vom Wurzelknoten zu Knoten 10 strömt. Dieses besitzt im Wurzelknoten einen bestimmten Druck, welcher sich gemäß dem Druckabfallgesetz beim Durchfluss durch die Rohre verringert. Beim Durchfluss durch die Verdichterstation kann der Druck entweder ansteigen oder unverändert bleiben⁵. Im Knoten 10 kann sowohl ein niedrigerer als auch ein höherer Druck als im Wurzelknoten herrschen, je nachdem, ob und wie stark die Verdichterstation den Druck des Gases erhöht.

3.

$$\begin{aligned}
p_6^2 = & p_r^2 - \underbrace{\phi_{0,1}|q_{r,1}|q_{r,1}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (r,1)} - \underbrace{\phi_{1,2}|q_{1,2}|q_{1,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (1,2)} \\
& - \underbrace{(p_2^2 - p_6^2)}_{\text{Druckveränderung durch Verdichterstation}} .
\end{aligned}$$

O. B. d. A. gehen wir davon aus, dass das Gas vom Wurzelknoten zu Knoten 6 strömt. Dieses besitzt im Wurzelknoten einen bestimmten Druck, welcher sich gemäß dem Druckabfallgesetz beim Durchfluss durch die Rohre verringert. Beim Durchfluss durch die Verdichterstation kann der Druck entweder ansteigen oder gleich bleiben⁵.

4. Formen wir die Gleichung aus 3. um, so erhalten wir:

$$p_2^2 = p_r^2 - \underbrace{\phi_{0,1}|q_{r,1}|q_{r,1}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (r,1)} - \underbrace{\phi_{1,2}|q_{1,2}|q_{1,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr } (1,2)} .$$

Dies ist die Gleichung für das Quadrat des Drucks an Knoten 2. Bei allen aktiven Elementen sind die Druckgleichungen ihrer Anfangs- und Endknoten äquivalent.

Verkürzte Druckgleichungen Wir modifizieren die Druckabfallsgleichung für das Quadrat des Drucks von Knoten 10 im zweiten Beispiel in Abschnitt 2.1.1. In diesem Beispiel haben wir festgestellt, dass wir nicht festlegen können, ob sich der Druck in Knoten 10 bezogen

⁵Im Bypassmodus siehe Abschnitt 2.2.1.

auf den Druck im Wurzelknoten erhöht oder verringert. Dies liegt an der Verdichterstation, welche auf dem Weg vom Wurzelknoten zu Knoten 10 liegt und den Druck innerhalb gewisser Grenzen verändern kann. Bei den verkürzten Druckgleichungen wählen wir als Ausgangsdruck die Druckvariable des Knotens, welcher als erstes auf dem eindeutigen Weg von Knoten 10 zum Wurzelknoten liegt⁶ und inzident zu einem aktiven Element ist. Für den Druck in Knoten 10 ergibt sich:

$$p_{10}^2 = p_6^2 - \underbrace{\phi_{6,8}|q_{6,8}|q_{6,8}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (6,8)}} - \underbrace{\phi_{8,10}|q_{8,10}|q_{8,10}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (8,10)}} .$$

Die Kreisgleichungen Wir betrachten das System (2.16) von Kreisgleichungen:

$$A_N^\top A_B^{-\top} \left[\phi_B \left| A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N \right| (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N) + d_B \right] = \phi_N |q_N| q_N + d_N$$

Jede Zeile entspricht einem der k Kreise im Graph G . Im Folgenden werden exemplarisch die Kreisgleichungen eines rein passiven⁷ Beispielnetzes und eines Netzes mit einer Verdichterstation dargestellt:

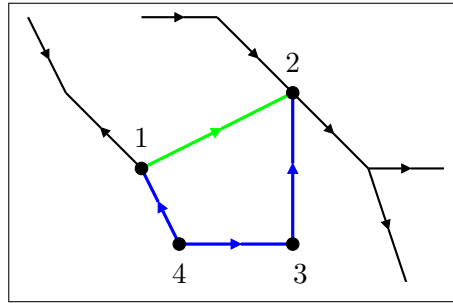


Abbildung 2.2.: Die Druckveränderung über die grüne Nichtbaumkante ist identisch mit der Druckveränderung über die blauen Baumkanten.

- In Bild 2.2 ist ein Graph mit einem Kreis dargestellt. Die Pfeile geben die Richtung der Kanten im Graph an. Die Kreisgleichungen stellen sicher, dass der Druckabfall von Knoten 1 zu Knoten 2 über die grüne Nichtbaumkante der gleiche sein muss wie über die drei blauen Baumkanten angefangen bei Knoten 1. Die Zeilen von $A_N^\top A_B^{-\top}$ korrespondieren jeweils zu einer Nichtbaumkante und die Spalten entsprechen den Baumkanten. Nur die Einträge zu Kanten, die durchlaufen werden, um vom Anfang der Nichtbaumkante zu deren Ende zu gelangen sind verschieden von Null⁸. Die relevanten Komponenten von d_B

⁶Bestimmung mit Matrix $A_B^{-\top}$.

⁷Ein Netz ohne schaltbare und aktive Elemente, also ein Netz, bestehend aus den Kantentypen Rohr und Kurzschluss, wird passives Netz genannt.

⁸ $-1 \hat{=}$ in Richtung der Nichtbaumkante und $1 \hat{=}$ entgegen der Richtung der Nichtbaumkante auf dem Kreis gelegen.

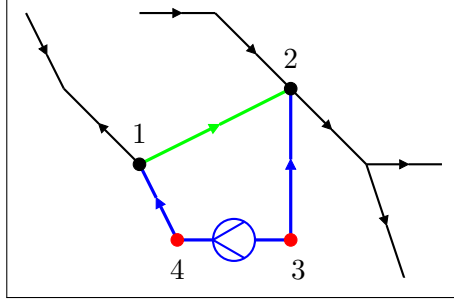


Abbildung 2.3.: Die Druckveränderung über die grüne Nichtbaumkante ist identisch mit der Druckveränderung über die blauen Baumkanten.

sind in diesem Beispiel Null, weil im Baum nur Rohre vorkommen. Die relevante Komponente von d_N ist ebenfalls Null, da die Nichtbaumkante ein Rohr ist. Die Kreisgleichung lautet:

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\phi_{4,1}|q_{4,1}|q_{4,1}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (4,1)}} + \underbrace{\phi_{4,3}|q_{4,3}|q_{4,3}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (4,3)}} + \underbrace{\phi_{3,2}|q_{3,2}|q_{3,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (3,2)}} = \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Druckabfall über Baumkanten}} \underbrace{\phi_{1,2}|q_{1,2}|q_{1,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (1,2)}} \cdot \\
 & \hspace{15em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Druckabfall über Nichtbaumkante}}
 \end{aligned}$$

- In Bild 2.3 ist ein Graph mit einem Kreis dargestellt, bei dem eine Verdichterstation in den Baumkanten vorkommt. Die Pfeile geben die Richtung der Kanten im Graph an. Kante (3,4) entspricht einer Verdichterstation, die Gas von Knoten 3 zu Knoten 4 verdichten kann. Die zugehörige Komponente von d_B enthält die Differenz der Quadrate vom Eingangs- und Ausgangsdruck. Die entsprechende Kreisgleichung ist:

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\phi_{4,1}|q_{4,1}|q_{4,1}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (4,1)}} + \underbrace{\phi_{3,2}|q_{3,2}|q_{3,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (3,2)}} - \underbrace{(p_3^2 - p_4^2)}_{\text{Druckveränderung durch Verdichterstation}} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Druckabfall über Baumkanten}} = \underbrace{\phi_{1,2}|q_{1,2}|q_{1,2}}_{\text{Druckabfall auf Rohr (1,2)}} \cdot \\
 & \hspace{15em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Druckabfall über Nichtbaumkante}}
 \end{aligned}$$

2.2. Zusätzliche Nebenbedingungen und Zielfunktion

Bisher wurden die Nebenbedingungen beschrieben, die den Druck an jedem Knoten bestimmen und für das Druckgleichgewicht in Kreisen zuständig sind. Insbesondere wurden Kanten vom Typ Rohr berücksichtigt. Für die speziellen Kantentypen Verdichterstation, Regler und Widerstand werden in diesem Kapitel weitere Nebenbedingungen entwickelt. Der Fluss über Kanten jeden Typs ist aus technischen, physikalischen oder vertraglichen Gründen beschränkt.

2.2.1. Verdichterstation

Eine Verdichterstationskante $e \in E_{VS}$ stellt immer eine Kombination aus Verdichtern und ihren Verdichterantriebsmaschinen dar. Selten ist innerhalb einer Station nur ein Verdichter mit Verdichterantriebsmaschine. Daher gibt es pro Station eine Liste von Möglichkeiten wie die einzelnen Verdichter kombiniert werden können. Werden Verdichter seriell hintereinander geschaltet, kann bei einem kleineren Gasfluss stark der Druck erhöht werden. Werden Verdichter parallel geschaltet, ist die Druckerhöhung geringer, aber der Durchfluss größer. Diese Feinheiten stellen wir in unserem Modell nur approximativ dar.

1. Druckerhöhung

Es gilt stets beim Durchfluss durch eine Verdichterstation, dass der Druck entweder erhöht wird oder unverändert bleibt. p_u ist der Druck am Eingangsknoten der Station und p_v der Druck am Ausgangsknoten. Er kann nicht sinken:

$$p_v - p_u \geq 0. \quad (2.17)$$

2. Bypassmodus

Manche Verdichterstationen können im Bypassmodus rückwärts durchströmt werden. q_e ist der durch die Station fließende Volumenstrom. In diesem Fall, darf sich der Druck nicht verändern:

$$(p_v - p_u) \cdot (-q_e) \leq 0. \quad (2.18)$$

- a) Fließt Gas rückwärts durch die Station, ist $-q_e$ positiv und damit $p_v - p_u \leq 0$. Zusammen mit (2.17) gilt: $p_v = p_u$.
- b) Fließt Gas vorwärts durch die Station, ist $-q_e$ negativ und damit $p_v - p_u \geq 0$. In diesem Fall ist (2.18) wegen (2.17) redundant.

Will man die Leistungsfähigkeit einer Verdichterstation korrekt beschreiben, muss man die Kennfelder ihrer Verdichter und Verdichterantriebsmaschinen sowie die Summenkennfelder für alle möglichen Konfigurationen der Verdichter modellieren. Die Abbildung der Verdichterantriebsmaschinen vernachlässigen wir. In [18] wird eine detaillierte Beschreibung eines einzelnen Kennfelds und der daraus resultierenden Gleichungen in den Variablen H_{ad} und Q gegeben. H_{ad} gibt die Änderung der adiabatischen Enthalpie in J kg^{-1} an. Diese Größe hängt in erster Linie vom Verhältnis aus Ausgangs- und Eingangsdruck ab und gibt die Energie an, welche benötigt wird, um einen bestimmten Massenfluss zu verdichten. Die Variable Q gibt den Volumenfluss

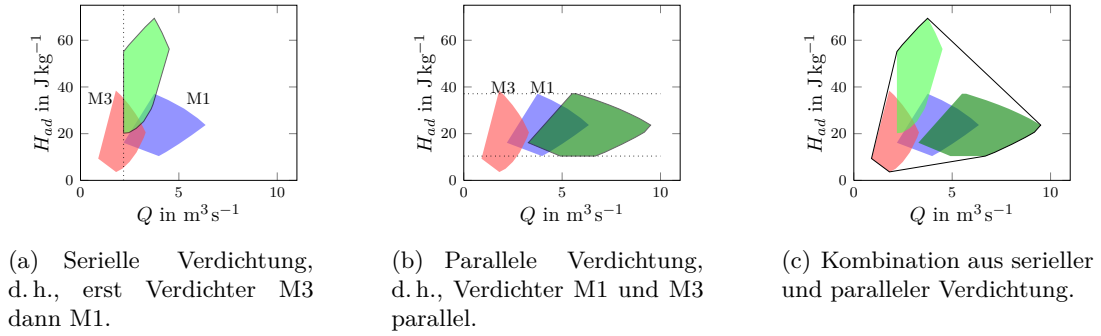


Abbildung 2.4.: Darstellung verschiedener Summenkennfelder.

durch die Verdichtermaschine in m^3s^{-1} an unter Berücksichtigung des Eingangsdrucks und der Eingangstemperatur. In [32, Kapitel 2.3.5] werden die Verdichterantriebsmaschinen und verschiedene Verdichtertypen besprochen. Mit $K(e)$ bezeichnen wir die Menge aller Konfiguration für die Verdichterstation e . Jeder Konfiguration $\gamma \in K(e)$ einer Verdichterstation entspricht ein Summenkennfeld. In Abbildung 2.4⁹ wird exemplarisch dargestellt wie man approximativ ein Summenkennfeld für eine Konfiguration bilden kann. In dieser Dissertationsschrift betrachten wir eine konvexe Überdeckung aller Summenkennfelder in den Variablen (p_u, p_v, q_e) . Wir relaxieren also die Menge der zulässigen Kombinationen (p_u, p_v, q_e) durch Verwendung einer größeren Menge, welche alle zulässigen Kombinationen der exakten Menge enthält. Wir gehen von folgenden Annahmen aus:

$$\begin{aligned}
\text{Minimaler Durchfluss: } \underline{q}_e &= \min_{\gamma \in K(e)} \underline{q}_\gamma \\
\text{Maximaler Durchfluss: } \overline{q}_e &= \max_{\gamma \in K(e)} \overline{q}_\gamma \\
\text{Minimaler Druckanstieg: } \underline{\Delta}_e &= \min_{\gamma \in K(e)} \underline{\Delta}_\gamma \\
\text{Maximaler Druckanstieg: } \overline{\Delta}_e &= \max_{\gamma \in K(e)} \overline{\Delta}_\gamma \\
\text{Minimales Druckverhältnis: } \underline{\varrho}_e &= \min_{\gamma \in K(e)} \underline{\varrho}_\gamma \\
\text{Maximales Druckverhältnis: } \overline{\varrho}_e &= \max_{\gamma \in K(e)} \overline{\varrho}_\gamma
\end{aligned}$$

Die Angaben $\underline{q}_\gamma/\overline{q}_\gamma$, $\underline{\Delta}_\gamma/\overline{\Delta}_\gamma$ und $\underline{\varrho}_\gamma/\overline{\varrho}_\gamma$ des minimalen/maximalen Durchflusses, minimalen/maximalen Druckanstiegs und des minimalen/maximalen Druckverhältnisses einer Konfiguration werden einmalig für jedes Netz a priori bestimmt. Hierzu wird ein detailliertes NLP mit Beachtung der Verdichterantriebsmaschinen für jede Konfiguration separat gelöst. Da die resultierenden Probleme klein sind, gehen wir davon aus, dass beim Lösen der NLPs mit BARON [2] Ergebnisse nahe der Optimalität gefunden werden¹⁰. Mit Hilfe des minimalen und maximalen Durchflusses sowie den minimalen und maximalen Druckerhöhungen und Druckverhältnissen

⁹Darstellung aus [32].

¹⁰Eine genaue Beschreibung mit Verweis auf das detaillierte NLP ist in [32, Kapitel 5.4] zu finden.

zwischen Ausgangs- und Eingangsdruck grenzen wir die Möglichkeiten jeder Verdichterstation ein. Daraus ergeben sich folgende weitere Nebenbedingungen pro Verdichterstation:

3. Minimaler Durchfluss

Die Verdichterstation kann keine beliebig kleinen Volumenströme verdichten:

$$(p_v - p_u) \cdot (\underline{q}_e - q_e) \leq 0. \quad (2.19)$$

Ist der Fluss q_e über die Verdichterstation geringer als der geforderte Minstdurchfluss \underline{q}_e , so gilt wegen (2.17) und (2.19):

$$p_v = p_u.$$

Die Verdichterstation kann also bei einem Fluss mit $q_e < \underline{q}_e$ nicht verdichten.

4. Maximaler Durchfluss

Die Verdichterstation kann keine beliebig großen Volumenströme verdichten:

$$(p_v - p_u) \cdot (q_e - \overline{q}_e) \leq 0. \quad (2.20)$$

Ist der Fluss q_e über die Verdichterstation größer als der erlaubte Maximaldurchfluss \overline{q}_e , so gilt wegen (2.17) und (2.20):

$$p_v = p_u.$$

Die Verdichterstation kann also bei einem Fluss mit $q_e > \overline{q}_e$ nicht verdichten.

5. Minimale Druckerhöhung

Die möglichen Druckerhöhungen sind nach unten begrenzt:

$$(p_v - p_u) \cdot (\underline{\Delta}_e - p_v + p_u) \leq 0. \quad (2.21)$$

Ist die Druckerhöhung $p_v - p_u$ über die Verdichterstation geringer als die geforderte minimale Druckerhöhung $\underline{\Delta}_e$, so gilt wegen (2.17) und (2.21):

$$p_v = p_u.$$

Die Verdichterstation kann also keine positiven Druckerhöhungen mit $p_v - p_u < \underline{\Delta}_e$ realisieren.

6. Maximale Druckerhöhung

Die möglichen Druckerhöhungen sind nach oben beschränkt:

$$(p_v - p_u) \cdot (p_v - p_u - \overline{\Delta}_e) \leq 0. \quad (2.22)$$

Eine Druckerhöhung $p_v - p_u$ oberhalb der maximal erlaubten Druckerhöhung $\overline{\Delta}_e$ ist unzulässig. Aus $p_v - p_u > \overline{\Delta}_e$ würde wegen (2.17) und (2.22) folgen:

$$p_v = p_u.$$

Die Verdichterstation kann also keine Druckerhöhungen mit $p_v - p_u > \overline{\Delta}_e$ realisieren.

7. Minimales Druckverhältnis

Die möglichen Druckverhältnisse sind nach unten begrenzt:

$$(p_v - p_u) \cdot \left(\underline{\varrho}_e - \frac{p_v}{p_u} \right) \leq 0. \quad (2.23)$$

Ist das Druckverhältnis $\frac{p_v}{p_u}$ über die Verdichterstation geringer als das geforderte minimale Druckverhältnis $\underline{\varrho}_e$, so gilt wegen (2.17) und (2.23):

$$p_v = p_u.$$

Die Verdichterstation kann also keine positiven Druckerhöhungen mit $\frac{p_v}{p_u} < \underline{\varrho}_e$ realisieren.

8. Maximales Druckverhältnis

Die Verdichterstation kann nicht jedes beliebig große Druckverhältnis zwischen p_v und p_u realisieren:

$$(p_v - p_u) \cdot \left(\frac{p_v}{p_u} - \bar{\varrho}_e \right) \leq 0. \quad (2.24)$$

Ein Druckverhältnis $\frac{p_v}{p_u}$ oberhalb des maximal erlaubten Druckverhältnisses $\bar{\varrho}_e$ ist unzulässig. Aus $\frac{p_v}{p_u} > \bar{\varrho}_e$ würde wegen (2.17) und (2.24) folgen:

$$p_v = p_u.$$

Die Verdichterstation kann also keine Druckerhöhungen mit $\frac{p_v}{p_u} > \bar{\varrho}_e$ realisieren.

2.2.2. Automatisierte Regler

Regler werden benötigt, um den Druck des Gases zu senken. Dies kann bei der Versorgung von Teilgebieten mit niedrigen Druckstufen nötig sein oder wenn Gas aus mehreren Leitungen zusammen strömen soll. Automatisierte Regler können den Druck eines beliebigen Gasflusses kontinuierlich bis zu einem beliebigen Druck verringern. Folgende Bedingungen gelten für alle Kanten $e \in E_{Re}$.

1. Druckverminderung

Es gilt stets beim Durchfluss durch einen Regler, dass der Druck entweder verringert wird oder gleich bleibt. Er kann nicht steigen. Ist ein Regler geschlossen, so sind der Eingangs- und Ausgangsdruck unabhängig voneinander:

$$(p_v - p_u) \cdot |q_e| \leq 0. \quad (2.25)$$

2. Bypassmodus

Manche Regler können im Bypassmodus rückwärts durchströmt werden. In diesem Fall, darf sich der Druck nicht verändern:

$$(p_v - p_u) \cdot (-q_e) \geq 0. \quad (2.26)$$

- a) Fließt kein Gas durch den Regler, so sind (2.25) und (2.26) trivial erfüllt.
- b) Fließt Gas rückwärts durch den Regler, so gilt $-q_e > 0$. Aus (2.26) folgt $p_v - p_u \geq 0$. Wegen (2.25) ergibt sich: $p_v = p_u$.
- c) Fließt Gas vorwärts durch den Regler, so gilt $-q_e < 0$. Bedingung (2.26) ist in diesem Fall redundant zu (2.25) und der Druck des Gases kann geregelt werden.

2.2.3. Stützregler

Stützregler sind nicht-automatisierte Regler. Ihr Ausgangsdruck kann nicht kontinuierlich frei gewählt werden. Jeder Stützregler $e \in E_{SR}$ hat einen fest eingestellten Ausgangsdruck \hat{p}_e , auf den er den Druck des Gases regeln soll. Ausnahmen treten ein, wenn der Druck des Gases am Ausgang des Reglers höher ist als der eingestellte Ausgangsdruck. In diesem Fall schließt sich der Stützregler und kein Gas kann hindurch fließen. Ist der Druck des Gases vor dem Regler geringer als der geforderte Ausgangsdruck, schaltet sich der Regler in den Bypassmodus und das Gas verändert seinen Druck nicht. Um diese Eigenschaften auszudrücken verwenden wir folgende Nebenbedingungen:

1. Druckerhöhung

$$(p_v - p_u) \cdot |q_e| \leq 0. \quad (2.27)$$

2. Bypass

$$(p_v - p_u) \cdot (-q_e) \geq 0. \quad (2.28)$$

3. Stützreglerbedingungen

$$q_e \cdot \max\{0, p_v - \hat{p}_e\} = 0 \quad (2.29)$$

$$(p_u - p_v) \cdot \max\{q_e, p_u - p_v\} \cdot \max\{0, \hat{p}_e - p_v\} = 0. \quad (2.30)$$

- a) Fließt kein Gas durch den Regler, so sind (2.27) und (2.28) trivial erfüllt.
- b) Fließt Gas rückwärts durch den Regler, so gilt $-q_e > 0$ und aus (2.28) folgt $p_v - p_u \geq 0$. Wegen (2.27) ergibt sich: $p_v = p_u$.
- c) Ist der Druck am Ausgang des Reglers größer als \hat{p}_e , so soll der Regler schließen. In dem Fall muss also gelten $q_e = 0$, was durch Bedingung (2.29) sichergestellt wird.
- d) Ist der Druck vor dem Regler kleiner als \hat{p}_e , so soll der Regler im Bypassmodus sein. Es muss also gelten $p_u = p_v$. Unter den Annahmen $q_e > 0$ und $p_u < \hat{p}_e$ folgt aus (2.30) dass entweder gelten muss $p_v = p_u$ oder $\hat{p}_e \leq p_v$. Letzteres kann nicht gelten, da $p_u < \hat{p}_e \leq p_v$ ein Widerspruch zur Einhaltung der Bedingung (2.28) wäre.
- e) Fließt Gas vorwärts durch den Regler, so darf der Druck am Ausgang des Reglers nicht größer als \hat{p}_e sein. Wir nehmen an, dass der Druck vor dem Regler größer oder gleich dem geforderten Druck \hat{p}_e ist, weil der Fall $p_u < \hat{p}_e$ in d) behandelt wird.

Der Stützregler soll den Ausgangsdruck auf den vordefinierten Druck \hat{p}_e einstellen. Mit der Annahme $q_e > 0$ folgt aus (2.29) $p_v \leq \hat{p}_e$, was zu $p_u \geq \hat{p}_e \geq p_v$ führt. Nach Bedingung (2.30) führt dies zu $p_v = \hat{p}_e$.

2.2.4. Widerstand

Widerstände induzieren Druckverminderungen des Gases auf zwei verschiedene Arten. Es gibt Widerstände, die einen konstanten Druckverlust erzeugen sowie solche, die einen Druckverlust abhängig von Durchfluss und Eingangsdruck beschreiben. Widerstände werden genutzt, um den Druckverlust abzubilden, der sich wegen Messanlagen oder durch kompliziertes nicht abgebildetes Piping¹¹ ergibt. Folgende Bedingungen gelten je nach Typ für die Widerstände $e \in E_W$.

1. Konstanter Druckverlust

$$(p_u - p_v) - \varsigma_e \cdot \text{sgn}(q_e) = 0. \quad (2.31)$$

- a) Wird der Widerstand vorwärts durchflossen, so ist $\text{sgn}(q_e) = 1$ und somit $p_u - p_v = \varsigma_e$. Der Druckverlust des Gases beim Durchfluss durch den Widerstand entspricht also dem festen Parameter ς_e .
- b) Wird der Widerstand rückwärts durchflossen¹², so ist $\text{sgn}(q_e) = -1$ und somit $p_v - p_u = \varsigma_e$. Der Druckverlust des Gases entspricht damit dem Parameter ς_e .

2. Druck- und durchflussabhängiger Druckverlust

Die in Definition (2.32) benutzten Konstanten und die AGA-Formel $z(p, T)$ zur Bestimmung des Kompressibilitätsfaktors werden im Anhang C und A.2 beschrieben. Der folgende Ausdruck beschreibt den Druckverlust des Gases beim Durchströmen eines druck- und durchflussabhängigen Widerstands:

$$\mathcal{R}_e(p, q) = \frac{8 \cdot \rho_0 \cdot p_0 \cdot \xi_e \cdot T_m \cdot q^2 \cdot z(p, T_m)}{\pi^2 \cdot z_0 \cdot T_0 \cdot D_e^4 \cdot 3,6^2 \cdot p \cdot 10^5}. \quad (2.32)$$

Mit Hilfe von Ausdruck (2.32) definieren wir die Nebenbedingung für druck- und durchflussabhängige Widerstände:

$$(p_u - p_v) - \mathcal{R}_e(\max\{p_u, p_v\}, q_e) \cdot \text{sgn}(q_e) = 0. \quad (2.33)$$

- a) Wird der Widerstand vorwärts durchflossen, so ist $\text{sgn}(q_e) = 1$ und $\max\{p_u, p_v\} = p_u$. Dies führt zu: $p_u - p_v = \mathcal{R}_e(p_u, q_e)$. Der Druckverlust des Gases beim Durchfluss durch den Widerstand entspricht also dem vom Durchfluss q_e und Eingangsdruck p_u abhängigen Ausdruck $\mathcal{R}_e(p_u, q_e)$.
- b) Wird der Widerstand rückwärts durchflossen¹³, so ist $\text{sgn}(q_e) = -1$ und $\max\{p_u, p_v\} = p_v$. Somit gilt: $p_v - p_u = \mathcal{R}_e(p_v, q_e)$. Der Druckverlust des Gases beim Durchfluss durch den Widerstand entspricht also dem vom Durchfluss q_e und Ausgangsdruck p_v abhängigen Ausdruck $\mathcal{R}_e(p_v, q_e)$.

¹¹Rohre mit geringem Durchmesser und vielen Krümmungen.

¹²Das Gas fließt von p_v zu p_u

¹³Das Gas fließt von p_v zu p_u

2.2.5. Flussbegrenzung

Verdichterstationen, Regler, Widerstände, Schieber, Kurzschlüsse und Rohre sind in ihrem Durchfluss begrenzt. Dabei handelt es sich entweder um Vorgaben einer Flussrichtung oder um eine Begrenzung des Volumenstroms im Vorwärts- oder auch im Rückwärtsfluss:

$$\begin{aligned} \underline{q_e} &\leq q_e \leq \overline{q_e} && , \text{ falls } e \text{ eine Nichtbaumkante ist.} \\ \underline{q_e} &\leq \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N \right)_e \leq \overline{q_e} && , \text{ falls } e \text{ eine Baumkante ist.} \end{aligned}$$

2.2.6. Zielfunktion

1. Fluss im Kreis minimieren

Theoretisch ist es möglich, dass ein großer Gasfluss im Kreis vorliegt. Als Beispiel dient ein Netz mit einem Kreis, welches in Abbildung 2.5 dargestellt ist. Das Gas wird durch die Verdichterstation verdichtet und fließt über den Regler. Dort wird der Druck reduziert und kann in der Verdichterstation erneut verdichtet werden. Dies sollte in zulässigen Lösungen vermieden werden, da ein Gasfluss im Kreis hohe Kosten durch unnötigen Gasverbrauch für die Verdichterantriebsmaschinen provoziert. Wir führen einen Term in der Zielfunktion ein, welcher den Kreisfluss minimieren soll:

$$\sum_{e \in N} q_e^2.$$

Jeder Kreis enthält genau eine Nichtbaumkante e . Wir minimieren durch Quadrieren sowohl den Vorwärts- als auch den Rückwärtsfluss über diese Kanten.

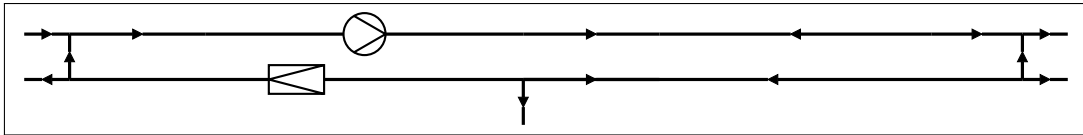


Abbildung 2.5.: Beispielnetz, in dem Gasfluss im Kreis möglich ist.

2. Druckveränderung in Verdichterstationen und automatisierten Reglern minimieren

Zusätzlich zur Kreisflussminimierung versuchen wir die Druckerhöhung in Verdichterstationen und die Druckreduktion in Reglern zu minimieren. In unserem Verfahren berechnen wir keine Kosten für den Verbrauch von Verdichterantriebsgas, sondern nutzen eine weitere indirekte Kostenminimierung:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_{VS}} (p_v - p_u)^2, & u \text{ ist Anfangs- und } v \text{ Endknoten der Verdichterstation } e. \\ \sum_{e \in E_{Re}} (p_u - p_v)^2, & u \text{ ist Anfangs- und } v \text{ Endknoten des automatisierten Reglers } e. \end{aligned}$$

2.3. Zusammenfassung des Modells

In diesem Abschnitt wird das Modell zusammengefasst, welches in 2.1 und 2.2 hergeleitet und beschrieben wurde. Wir verwenden die verkürzten Drucknebenbedingungen, welche in 2.1.1 in einem Beispiel eingeführt wurden. In der Matrix $A_B^{-\top}$ ist pro Zeile der Weg vom Wurzelknoten zum der Zeile entsprechenden Knoten ablesbar. Liegt auf dem eindeutigen Weg vom der Zeile entsprechenden Knoten zur Wurzel ein aktives Element, verkürzen wir den Weg bis zum ersten Auftreten eines aktiven Elements. Die übrigen Einträge der Zeile werden auf Null fixiert und wir nennen die resultierende Matrix $A_{B|w}^{-\top}$. Wir führen Toleranzen ein, mit denen die Gleichungen und Ungleichungen erfüllt werden müssen, da wir nicht an theoretisch exakten Lösungen interessiert sind, sondern an Lösungen, welche für reale Instanzen akzeptabel sind. Eingabedaten wie Rohrrauigkeit, Widerstandsbeiwert und Verdichterstationsgrenzen sind nicht exakt bekannt, wodurch man die Einführung von Toleranzen zusätzlich begründen kann. Bei den Nebenbedingungen für spezielle Kantentypen hängt es von der Verdichterstations-, Regler- oder Widerstandskante ab, ob der zugehörige Fluss durch eine Variable oder eine Nebenbedingung ausgedrückt wird. Jeder Nichtbaumkante entspricht eine Variable und der zu Baumkanten gehörige Fluss wird durch Nichtbaumkanten ausgedrückt. Um die Menge der Druckvariablen besser beschreiben zu können nennen wir einen Knoten „aktives-Element-Knoten“, wenn er inzident zu einem aktiven Element ist und fassen diese Knoten in der Menge V_{AE} zusammen.

1. Variablen:

- a) Druck im Wurzelknoten: $\underline{p}_r \leq p_r \leq \bar{p}_r$.
- b) Druck in aktives-Element-Knoten: $\underline{p}_u \leq p_u \leq \bar{p}_u \quad \forall u \in V_{AE}$.
- c) Flussvariablen auf den Kreiskanten: $\underline{q}_e \leq q_e \leq \bar{q}_e \quad \forall e \in N$.

2. Nebenbedingungen:

- a) Druckgleichungen für alle Knoten $u \in V$.
 - i. Falls $u \notin V_{AE}$ und es keinen aktives-Element-Knoten auf dem eindeutigen Weg vom Knoten u zum Wurzelknoten gibt:

$$\underline{p}_u^2 \leq p_r^2 - \left[A_{B|w}^{-\top} \left(\phi_B(q_N) |A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N| (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N) \right) \right]_u \leq \bar{p}_u^2$$

- ii. Falls $u \notin V_{AE}$. Knoten a entspricht dem ersten aktives-Element-Knoten auf dem eindeutigen Weg vom Knoten u zum Wurzelknoten:

$$\underline{p}_u^2 \leq p_a^2 - \left[A_{B|w}^{-\top} \left(\phi_B(q_N) |A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N| (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N) \right) \right]_u \leq \bar{p}_u^2$$

- iii. Falls $u \in V_{AE}$ und es keinen aktives-Element-Knoten auf dem eindeutigen Weg vom Knoten u zum Wurzelknoten gibt:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{AE} &\leq p_r^2 - \left[A_{B|w}^{-\top} \left(\phi_B(q_N) |A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N| (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N) \right) \right]_u - p_u^2 \\ &\leq \varepsilon_{AE} \end{aligned}$$

- iv. Falls $u \in V_{\text{AE}}$. Knoten a entspricht dem ersten aktives-Element-Knoten auf dem eindeutigen Weg vom Knoten i zum Wurzelknoten:

$$-\varepsilon_{\text{AE}} \leq p_a^2 - \left[A_{B|W}^{-\top} \left(\phi_B(q_N) |A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N| (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N) \right) \right]_u - p_u^2 \leq \varepsilon_{\text{AE}}$$

- b) Vektor von Kreisgleichungen für alle Kanten in N :

$$-\mathbb{1}_N \varepsilon_{\text{Kr}} \leq A_N^\top A_B^{-\top} \left[\phi_B(q_N) |A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N| (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N) + d_B \right] - \phi_N(q_N) |q_N| q_N - d_N \leq \mathbb{1}_N \varepsilon_{\text{Kr}}.$$

- c) Verdichterstationsnebenbedingungen für alle Kanten $e \in E_{\text{VS}}$. Der Anfangsknoten von e ist u und v ist der Endknoten:

- i. $p_v - p_u \geq 0$.
- ii. $(p_v - p_u) \cdot (-q_e) \leq \varepsilon_{\text{b}}$.
- iii. $(p_v - p_u) \cdot (\underline{q}_e - q_e) \leq \varepsilon_{\text{f}}$.
- iv. $(p_v - p_u) \cdot (q_e - \overline{q}_e) \leq \varepsilon_{\text{f}}$.
- v. $(p_v - p_u) \cdot (\underline{\Delta}_e - p_v + p_u) \leq \varepsilon_{\text{dd}}$.
- vi. $(p_v - p_u) \cdot (p_v - p_u - \overline{\Delta}_e) \leq \varepsilon_{\text{dd}}$.
- vii. $(p_v - p_u) \cdot (\underline{p}_e - \frac{p_v}{p_u}) \leq \varepsilon_{\text{dv}}$.
- viii. $(p_v - p_u) \cdot (\frac{p_v}{p_u} - \overline{p}_e) \leq \varepsilon_{\text{dv}}$.

- d) Nebenbedingungen für alle automatisierten Regler $e \in E_{\text{Re}}$. Der Anfangsknoten von e ist u und v ist der Endknoten:

- i. $(p_v - p_u) \cdot |q_e| \leq 0$.
- ii. $(p_v - p_u) \cdot (-q_e) \geq -\varepsilon_{\text{b}}$.

- e) Nebenbedingungen für alle Stützregler $e \in E_{\text{SR}}$. Der Anfangsknoten von e ist u und v ist der Endknoten:

- i. $(p_v - p_u) \cdot |q_e| \leq 0$.
- ii. $(p_v - p_u) \cdot (-q_e) \geq -\varepsilon_{\text{b}}$.
- iii. $-\varepsilon_{\text{sr}} \leq q_e \cdot \max\{0, p_v - \hat{p}_e\} \leq \varepsilon_{\text{sr}}$.
- iv. $-\varepsilon_{\text{sr}} \leq (p_u - p_v) \cdot \max\{q_e, p_u - p_v\} \cdot \max\{0, \hat{p}_e - p_v\} \leq \varepsilon_{\text{sr}}$.

- f) Widerstandsnebenbedingungen für alle $e \in E_{\text{W}}$. Der Anfangsknoten von e ist u und v der Endknoten.

- i. Falls e ein Widerstand mit konstantem Druckverlust ist:

$$-\varepsilon_{\text{w}} \leq (p_u - p_v) - \varsigma_e \cdot \text{sgn}(q_e) \leq \varepsilon_{\text{w}}$$

ii. Falls e ein Widerstand mit druck- und durchflussabhängigem Druckverlust ist¹⁴:

$$-\varepsilon_w \leq (p_u - p_v) \cdot \mathcal{R}_e(\max\{p_u, p_v\}, q_e) \cdot \text{sgn}(q_e) \leq \varepsilon_w.$$

g) Flussbegrenzungen für alle Kanten e in B :

$$\underline{q}_e \leq (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N q_N)_e \leq \overline{q}_e$$

3. Zielfunktion

Minimierung der Summe des Kreisflusses, der Druckerhöhung beim Durchfluss von Verdichterstationen und der Druckreduzierung beim Fluss durch automatisierte Regler. Die Knoten u sind jeweils die Eingangsknoten der Verdichterstationen bzw. automatisierten Regler e und die Knoten v sind jeweils die Ausgangsknoten.

$$\min_{q_e, p_u, p_v} \left\{ \sum_{e \in N} q_e^2 + \sum_{e \in E_{VS}} (p_v - p_u)^2 + \sum_{e \in E_{Re}} (p_u - p_v)^2 \right\}.$$

¹⁴Definition von \mathcal{R}_e in (2.32).

3. Strukturen

3.1. Dekomposition eines Netzes mit Stützreglergebieten

In diesem Abschnitt stellen wir ein Verfahren zur Dekomposition von Gasnetzen vor. Reale Netze sind oft sehr groß und komplex, wodurch das Finden von Lösungen zu einer gegebenen Nominierung schwierig werden kann. Das hier vorgestellte Verfahren erlaubt die Dekomposition des Netzes in kleinere Gebiete, welche separat berechnet werden können, was eine effizientere Berechnung von großen Gasnetzen ermöglicht. Grundlage der Dekomposition sind Stützreglergebiete, welche in realen Gasnetzen enthalten sein können. Als Stützreglergebiet bezeichnen wir ein Gebiet $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|} = (\tilde{V}_{|\mathcal{N}|}, E_{|\mathcal{N}|})$, welches keine schaltbaren Elemente enthält und von den Stützreglern der Menge \mathcal{N} aufgespeist wird. Diese speziellen Regler wurden in Abschnitt 2.2.3 eingeführt. Bei den Stützreglern sei Rückwärtsfluss verboten und wir gehen davon aus, dass der Druck auf der Eingangsseite jedes Stützreglers $e \in \mathcal{N}$ höher als der geforderte Druck \hat{p}_e ist. Wir definieren den Volumenfluss, welcher insgesamt innerhalb des Stützreglergebiete abgenommen wird als Y .

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist, dass die Verteilung des Flusses Y auf die aufspeisenden Stützregler der Menge \mathcal{N} eindeutig ist, sobald eine zulässige Aufteilung existiert. Somit ist eine Dekomposition von Gasnetzen mit Stützreglergebieten effizient möglich.

Die Berechnung einer zulässigen Lösung für das Originalnetz $\tilde{G}^+ = (\tilde{V}, E^+)$, welche die Dekomposition durch die Stützreglergebiete ausnutzt, erfolgt in mehreren Schritten:

1. Identifikation von Stützreglergebieten innerhalb des Originalnetzes \tilde{G}^+ .
2. Berechnung der Flüsse über die einzelnen Stützregler in jedem Stützreglergebiet $\tilde{G}_{|\mathcal{N}(i)|}^i$, $i = 1, \dots, s$ mit zulässiger Lösung, wobei s die Anzahl der Stützreglergebiete im Netz \tilde{G}^+ sei. Nach dem Resultat in Abschnitt 3.1.2 ist diese zulässige Lösung eindeutig. Wird für ein Gebiet keine Lösung gefunden, kann es auch keine für das Originalnetz, in welchem das Stützreglergebiet enthalten ist, geben.
3. Das Ausschneiden der Stützreglergebiete und der aufspeisenden Stützregler aus dem Originalnetz $\tilde{G}^+ = (\tilde{V}, E^+)$ führt zu einem Netz $\tilde{G}^- = (\tilde{V}^-, E^-)$ ohne die Stützreglergebiete.
4. Fixieren der Flüsse im Netz \tilde{G}^- an den Eingangsknoten der ausgeschnittenen Stützregler. Sei u der Fuß, welcher im Netz \tilde{G}^- enthalten bleibt, des Stützreglers e . Der Vektor \tilde{b} gibt die Ein- und Ausspeisungen für das Netz \tilde{G}^- an. Für den Knoten u wird \tilde{b} modifiziert, wobei \tilde{b}_u^{alt} der ursprünglich ein- oder ausgespeiste Fluss an Knoten u sei:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_u &= \tilde{b}_u^{\text{alt}} & , \text{ falls } \hat{q}_e = 0 \quad \forall e \in \mathcal{N}(i), i = 1, \dots, s. \\ \tilde{b}_u &= \hat{q}_e + \tilde{b}_u^{\text{alt}} & , \text{ falls } \hat{q}_e > 0 \quad \forall e \in \mathcal{N}(i), i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

\hat{q}_e ist der Fluss über Stützregler e aus der separaten Berechnung des Stützreglergebiets. An den Eingangsknoten von aufspeisenden Stützreglern werden die vorausgesetzten Druckbedingungen hinzugefügt:

$$p_u \geq \hat{p}_e.$$

5. Behandlung des verkleinerten Originalnetzes \tilde{G}^- wie in den Kapiteln 2.3 und 4.1 beschrieben.

Bedingungen an Stützregler.

$$\begin{aligned} p_v \leq \hat{p}_e \wedge p_u > \hat{p}_e &\Leftrightarrow p_v = \hat{p}_e \wedge q_e \geq 0 \\ p_v \leq \hat{p}_e \wedge p_u \leq \hat{p}_e &\Leftrightarrow p_v = p_u \\ p_v > \hat{p}_e &\Rightarrow q_e = 0 \end{aligned}$$

Der Eingangsknoten von Stützregler e ist Knoten u und der Ausgangsknoten ist Knoten v . Der fest eingestellte Druck des Reglers ist \hat{p}_e .

Berechnung der Drücke und Flüsse im Gebiet $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$: Nach Satz 3.13 ist die Aufteilung der Flüsse in einem Gebiet $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$ eindeutig, wenn die Eingangs- und Ausgangsflüsse fixiert und bilanziert sind. Wird zusätzlich ein Druck an einem beliebigen Knoten festgelegt, sind auch die Drücke an allen anderen Knoten eindeutig bestimmt. Fordert man weiter die Einhaltung von Mindest- und Maximaldrücken kann es sein, dass es keine zulässige Lösung gibt. \tilde{A} sei die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix von $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$. Die Ein- und Ausspeisungen der Knoten innerhalb des Stützreglergebiets sind die Komponenten des Vektors \tilde{b} . Der Variablenvektor q beinhaltet den Fluss über jede Kante des Gebiets und der Variablenvektor \tilde{p}^2 gibt das Quadrat des Drucks an jedem Knoten an:

$$\begin{aligned} \tilde{A}q &= \tilde{b} \\ \tilde{A}^T \tilde{p}^2 &= \phi|q|q. \end{aligned}$$

In dem speziellen Fall der aufspeisenden Stützregler berechnen wir Lösungen für das System bei nicht überall fixiertem Ein- und Ausspeisevektor \tilde{b} . Das System wird um Bedingungen an den Druck an Ausgangsknoten von Stützreglern ergänzt.

3.1.1. Sätze und Beispiele für spezielle Stützreglergebiete

In diesem Abschnitt betrachten wir einige spezielle Stützreglergebiete. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass höchstens drei aufspeisende Stützregler und höchstens ein Kreis vorhanden sind. Anhand von Beispielen untersuchen wir jeweils die Verteilung des einzuspeisenden Flusses Y auf die aufspeisenden Stützregler.

Betrachtung eines kreisfreien Stützreglergebiets \tilde{G}_2 Das Gebiet \tilde{G}_2 wird von zwei Stützreglern aufgespeist und alle Kanten sind Rohre. \hat{q}_1 ist der Fluss über Stützregler e_1 und $Y - \hat{q}_1$ der Fluss über Stützregler e_2 . Der Druck am Ausgangsknoten von e_1 wird auf \hat{p}_{e_1} fixiert. Für den Vektor \tilde{b} , welcher die Aus- und Einspeisungen bestimmt, gilt: $\tilde{b} = \tilde{b}(\hat{q}_1) = (-\hat{q}_1, -(Y - \hat{q}_1), b_2, \dots, b_{|\tilde{V}_2|-1})$. Die Knotenmenge V_2 besteht aus allen Knoten der Menge \tilde{V}_2 außer dem Wurzelknoten, welcher der Ausgangsknoten von Stützregler e_1 sei. Die Menge der Kanten ist E_2 und die zugehörige Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix nach Streichen der zum Wurzelknoten korrespondierenden ersten Zeile ist A . $A = (A_B, A_N)$ ist eine Aufteilung von A in Baum- und Nichtbaumanteil. Der Ein- und Ausspeisevektor verkürzt sich durch das Streichen des Wurzelknoten zu $b = b(\hat{q}_1) = (-(Y - \hat{q}_1), b_2, \dots, b_{|V_2|})$. Weil wir annehmen, dass das Gebiet \tilde{G}_2 keine Kreise hat, vereinfacht sich die Berechnung der Flüsse auf den Baumkanten von $A_B^{-1}b(\hat{q}_1) - A_B^{-1}A_Nq_N$ zu $A_B^{-1}b(\hat{q}_1)$. Die aus Kapitel 2 bekannte Herleitung unter Nutzung der Gleichungen für den Druckabfall und der Bilanz an jedem Knoten liefert mit dem Ausgangsknoten von e_1 als Wurzelknoten:

$$\hat{p}_{e_2}^2 = \left[\hat{p}_{e_1}^2 \mathbf{1} - (A_B^{-\top} \phi_B |A_B^{-1}b(\hat{q}_1)| (A_B^{-1}b(\hat{q}_1))) \right]_1 \quad (3.1)$$

$$p_i^2 = \left[\hat{p}_{e_1}^2 \mathbf{1} - (A_B^{-\top} \phi_B |A_B^{-1}b(\hat{q}_1)| (A_B^{-1}b(\hat{q}_1))) \right]_i, i = 2, \dots, |V_2|, \quad (3.2)$$

wobei mit der rechten Seite von (3.1) das Quadrat des Drucks am Ausgangsknoten von Stützregler e_2 berechnet und mit dem geforderten Druckquadrat $\hat{p}_{e_2}^2$ gleichgesetzt wird. Zum Beweis, dass die Aufteilung des Flusses Y auf die Stützregler eindeutig ist, benötigen wir die Aussage, dass die Berechnung des Drucks p_1 bezüglich des ein- und ausgespeisten Flusses $b(\hat{q}_1)$ injektiv ist. Dies bedeutet, dass es zu festen Ausgangsdrücken \hat{p}_{e_1} und \hat{p}_{e_2} an Stützreglern e_1 und e_2 in \tilde{G}_2 genau eine Verteilung von Y auf die Stützregler gibt. Mit (3.2) kann man nach Lösen der Gleichung (3.1) die Drücke an den übrigen Knoten des Gebiets \tilde{G}_2 bestimmen.

Satz 3.1

Fassen wir die rechte Seite der Gleichung (3.1) sowie die rechten Seiten der Gleichungen aus (3.2) bei fixiertem Druck \hat{p}_{e_1} als Funktionen in Abhängigkeit des Flusses \hat{q}_1 auf, so sind diese Funktionen injektiv. Sie bestimmen das Quadrat des Drucks in den Knoten der Menge V_2 und wir bezeichnen sie mit $P_i(\hat{q}_1) = \hat{p}_{e_1}^2 - \left[A_B^{-\top} \phi_B |A_B^{-1}b(\hat{q}_1)| (A_B^{-1}b(\hat{q}_1)) \right]_i \quad \forall i \in V_2$. D.h. es gibt zu jeder Kombination fixierter Ausgangsdrücke \hat{p}_{e_1} und \hat{p}_{e_2} genau eine Flussverteilung \hat{q}_1 und $Y - \hat{q}_1$ auf die beiden Stützregler e_1 und e_2 .

Beweis

α_{lj} seien die Einträge der Matrix A_B^{-1} und γ_{jl} die Einträge der Matrix $A_B^{-\top}$. Für die Funktion, welche das Quadrat des Drucks an einem Punkt i bestimmt, gilt:

$$\begin{aligned}
P_i(\hat{q}_1) &= \hat{p}_{e_1}^2 - \left[A_B^{-\top} \phi_B \left| A_B^{-1} b(\hat{q}_1) \right| (A_B^{-1} b(\hat{q}_1)) \right]_i \\
&\iff \\
P_i(\hat{q}_1) &= \hat{p}_{e_1}^2 - \left[A_B^{-\top} \begin{bmatrix} \phi_{B_1} \left| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{1j} b_j(\hat{q}_1) \right| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{1j} b_j(\hat{q}_1) \\ \vdots \\ \phi_{B_{|B|}} \left| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{|B|j} b_j(\hat{q}_1) \right| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{|B|j} b_j(\hat{q}_1) \end{bmatrix} \right]_i \\
&\iff \\
P_i(\hat{q}_1) &= \hat{p}_{e_1}^2 - \begin{bmatrix} \sum_l \gamma_{1l} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}_1) \right| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}_1) \\ \vdots \\ \sum_l \gamma_{|V_2|l} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}_1) \right| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}_1) \end{bmatrix}_i \\
&\iff \\
P_i(\hat{q}_1) &= \hat{p}_{e_1}^2 - \sum_l \gamma_{il} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}_1) \right| \sum_{j=1}^{|V_2|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}_1). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Wir richten die Kanten im Graph so, dass sie von der Wurzel weg gerichtet sind. Dies führt dazu, dass alle Einträge der Matrix A_B^{-1} nicht negativ sind, es gilt also $\alpha_{lj}, \gamma_{jl} \in \{0,1\} \ \forall l \in B \ \forall j \in V_2$. Weiter gilt $\alpha_{lj} = \gamma_{jl}$. Wir nehmen vereinfachend $\alpha_{lj} = \gamma_{jl} = 1$ an und schreiben (3.3) als:

$$P_i(\hat{q}_1) = \hat{p}_{e_1}^2 - \phi_{B_1}(\hat{q}_1 + c_1)|\hat{q}_1 + c_1| - \dots - \phi_{B_{|B|}}(\hat{q}_1 + c_{|B|})|\hat{q}_1 + c_{|B|}|. \tag{3.4}$$

Diese Darstellung ergibt sich, weil im Vektor $b(\hat{q}_1)$ der Ein- und Ausspeisungen nur in der ersten Komponente die Variable \hat{q}_1 vorkommt. Da alle Kanten Rohre sind gilt $\phi_i > 0$. Weiterhin sind c_l Konstanten. Eine Funktion der Form (3.4) ist injektiv, da die Funktionen $f_c(t) = (t+c)|t+c|$ mit konstantem c streng monoton steigend sind und damit $-\phi f_c(t)$ mit $\phi > 0$ streng monoton fallend. Die Summe von streng monoton fallenden Funktionen ist wieder streng monoton fallend und damit injektiv. □

Beispiel

In Bild 3.1 ist ein Gebiet \tilde{G}_2 dargestellt. Die rot markierten Ausgangsknoten der Stützregler begrenzen das Gebiet, welches die Stützregler nicht enthält. In grün dargestellt sind die eingespeisten Flüsse an Quellen und in blau die ausgespeisten Flüsse an Senken.

Mit der Bezeichnung der Knoten von 0 bis 3 und der Bezeichnung der Kanten von a bis c sowie der Bestimmung von Knoten 0 als Wurzelknoten gilt nach Löschen der zum Wurzelknoten korrespondierenden Zeile in der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix:

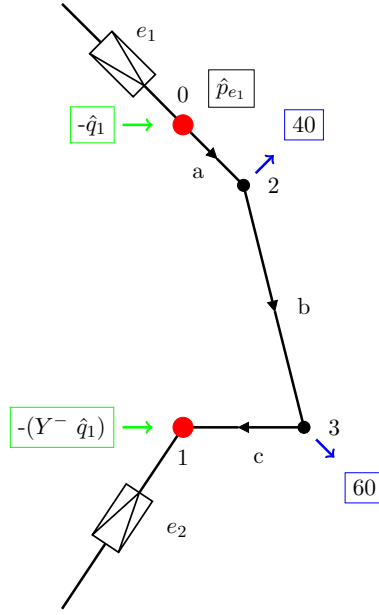
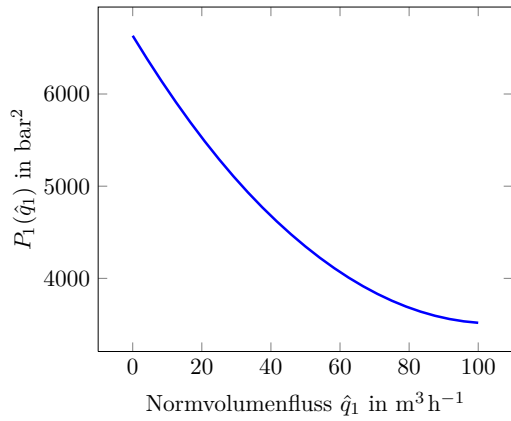


Abbildung 3.1.: Kreisfreies Stützreglergebiet \tilde{G}_2 .

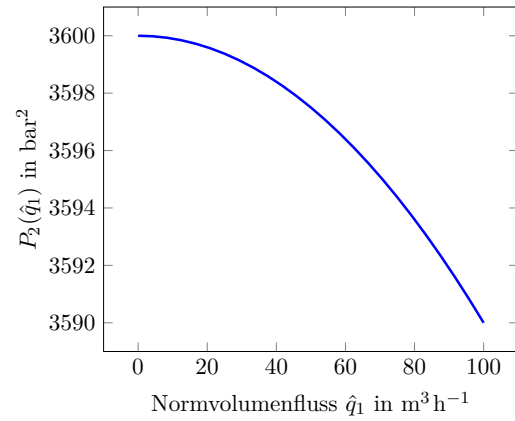
$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \hat{q}_1 - 100 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$. Dies führt mit den Konstanten $\phi_a = 0,001$, $\phi_b = 0,02$ und $\phi_c = 0,3$ und einem festgelegten Ausgangsdruck für Stützregler e_1 von $\hat{p}_{e_1} = 60$ bar zu folgenden Funktionen für das Quadrat des Drucks an den Knoten 1, 2 und 3 in Abhängigkeit vom Fluss \hat{q}_1 aus Knoten 0:

$$\begin{aligned} P_1(\hat{q}_1) &= 3600 - 0,001\hat{q}_1|\hat{q}_1| - 0,02(\hat{q}_1 - 40)|\hat{q}_1 - 40| - 0,3(\hat{q}_1 - 100)|\hat{q}_1 - 100|, \\ P_2(\hat{q}_1) &= 3600 - 0,001\hat{q}_1|\hat{q}_1|, \\ P_3(\hat{q}_1) &= 3600 - 0,001\hat{q}_1|\hat{q}_1| - 0,02(\hat{q}_1 - 40)|\hat{q}_1 - 40|. \end{aligned}$$

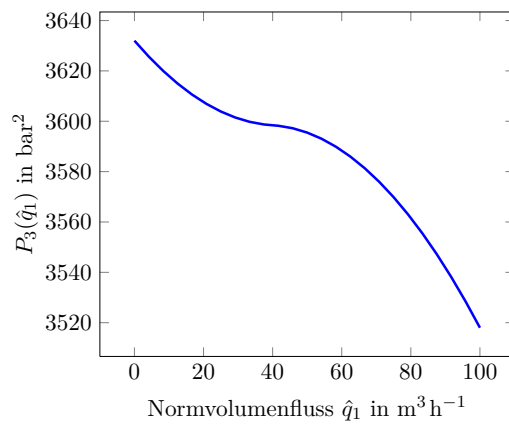
Abbildung 3.2 enthält die Graphen $\{(\hat{q}_1, P_i(\hat{q}_1)), i = 1, \dots, 3\}$, welche das Quadrat des Drucks an den Knoten 1 bis 3 in Abhängigkeit von dem Fluss $0 \leq \hat{q}_1 \leq 100$ darstellen.



(a) Quadrat des Drucks an Knoten 1.



(b) Quadrat Drucks an Knoten 2.



(c) Quadrat des Drucks an Knoten 3.

Abbildung 3.2.: Graphen zu den Knotendruckfunktionen im Gebiet \tilde{G}_2 .

Betrachtung eines kreisfreien Stützreglergebiets \tilde{G}_3 Das Gebiet \tilde{G}_3 wird von drei Stützreglern aufgespeist und alle Kanten sind Rohre. \hat{q}_1 und \hat{q}_2 sind die Flüsse, welche über Stützregler e_1 und über Stützregler e_2 eingespeist werden und $Y - \hat{q}_1 - \hat{q}_2$ ist der Fluss über Stützregler e_3 . Für den Vektor der Ein- und Ausspeisungen gilt: $\tilde{b} = \tilde{b}(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = (-\hat{q}_1, -\hat{q}_2, -(Y - \hat{q}_1 - \hat{q}_2), b_3, \dots, b_{|\tilde{V}_3|-1})$. Die Knotenmenge V_3 enthält alle Knoten der Menge \tilde{V}_3 außer dem Wurzelknoten, welcher der Ausgangsknoten von Stützregler e_1 sei. Die Menge der Kanten bezeichnen wir mit E_3 . Für den verkürzten Vektor der Ein- und Ausspeisungen ohne den Wurzelknoten gilt: $b = b(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = (-\hat{q}_2, -(Y - \hat{q}_1 - \hat{q}_2), b_3, \dots, b_{|V_3|})$. Da wir ein kreisfreies Gebiet betrachten, gilt für den Druckabfall:

$$\hat{p}_{e_{i+1}}^2 = \left[\hat{p}_{e_1}^2 \mathbf{1} - (A_B^{-\top} \phi_B \left| A_B^{-1} b(\hat{q}_1, \hat{q}_2) \right| (A_B^{-1} b(\hat{q}_1, \hat{q}_2)) \right]_i, i = 1, 2 \quad (3.5)$$

$$p_i^2 = \left[\hat{p}_{e_1}^2 \mathbf{1} - (A_B^{-\top} \phi_B \left| A_B^{-1} b(\hat{q}_1, \hat{q}_2) \right| (A_B^{-1} b(\hat{q}_1, \hat{q}_2)) \right]_i, i = 3, \dots, |V_3|. \quad (3.6)$$

Mit (3.5) und den Fixierungen \hat{p}_{e_1} , \hat{p}_{e_2} und \hat{p}_{e_3} der Ausgangsdrücke für die Stützregler e_1 , e_2 und e_3 können die Flussvariablen \hat{q}_1 und \hat{q}_2 bestimmt werden. Danach kann man durch Einsetzen in das System (3.6) die Drücke an den übrigen Knoten bestimmen.

Beispiel

In Bild 3.3 ist ein Gebiet \tilde{G}_3 dargestellt. Die rot markierten Ausgangsknoten der Stützregler begrenzen das Gebiet, welches die Stützregler nicht enthält. In grün dargestellt sind die eingespeisten Flüsse von Quellen und in blau der ausgespeiste Fluss der Senke.

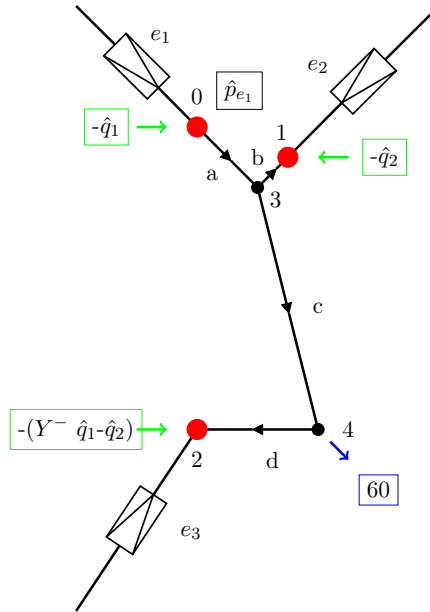


Abbildung 3.3.: Kreisfreies Stützreglergebiet \tilde{G}_3 .

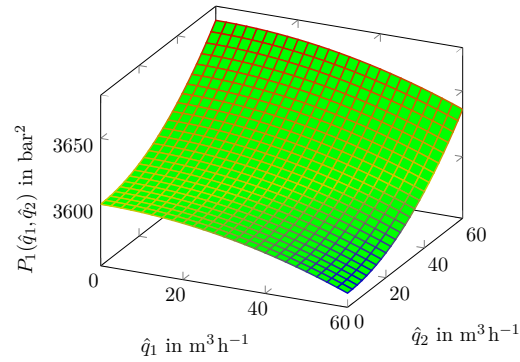
Mit der Bezeichnung der Knoten von 0 bis 4, der Bezeichnung der Kanten von a bis d und mit Knoten 0 als Wurzelknoten gilt:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -\hat{q}_2 \\ -60 + \hat{q}_1 + \hat{q}_2 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}.$$
 Dies führt mit den Konstanten $\phi_a = 0,01$, $\phi_b = 0,02$, $\phi_c = 0,03$ und $\phi_d = 0,04$ sowie einem festgelegten Ausgangsdruck über Stützregler e_1 von $\hat{p}_{e_1} = 60$ bar zu folgenden Funktionen für den Druck an den Knoten 1 bis 4 in Abhängigkeit von den Flüssen \hat{q}_1 und \hat{q}_2 :

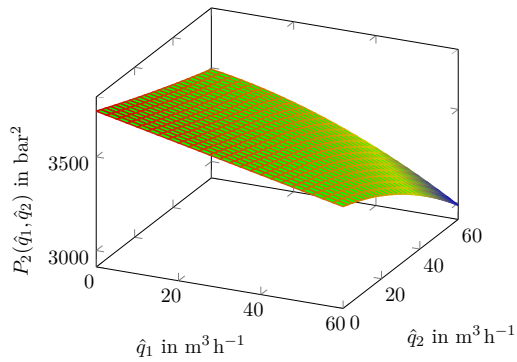
$$\begin{aligned}
 P_1(\hat{q}_1, \hat{q}_2) &= 3600 - 0,01\hat{q}_1|\hat{q}_1| - 0,02(\hat{q}_2)|\hat{q}_2|, \\
 P_2(\hat{q}_1, \hat{q}_2) &= 3600 - 0,01\hat{q}_1|\hat{q}_1| - 0,03(\hat{q}_1 + \hat{q}_2)|\hat{q}_1 + \hat{q}_2| - 0,04(\hat{q}_1 + \hat{q}_2 - 60)|\hat{q}_1 + \hat{q}_2 - 60|, \\
 P_3(\hat{q}_1, \hat{q}_2) &= 3600 - 0,01\hat{q}_1|\hat{q}_1|, \\
 P_4(\hat{q}_1, \hat{q}_2) &= 3600 - 0,01\hat{q}_1|\hat{q}_1| - 0,03(\hat{q}_1 + \hat{q}_2)|\hat{q}_1 + \hat{q}_2|.
 \end{aligned}$$

In Abbildung 3.4 sind die zu den Funktionen gehörenden Funktionsgraphen für $0 \leq \hat{q}_1, \hat{q}_2 \leq 60$ dargestellt.

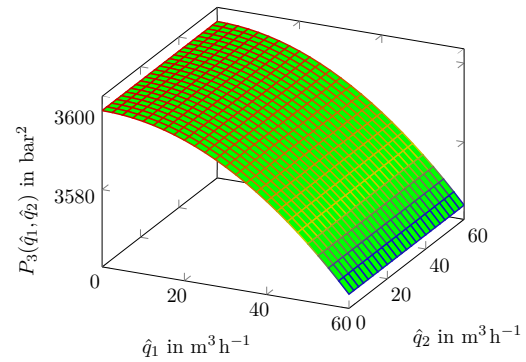
Damit Gas in das Stützreglergebiet strömen kann, muss mindestens der Stützregler mit dem größten geforderten Druck \hat{p}_e geöffnet sein. Auch für alle weiteren geöffneten Stützregler gilt, dass ihr Ausgangsdruck gleich dem geforderten Druck sein muss. Wir nehmen an, dass alle Stützregler geöffnet sind. In den Abbildungen 3.4(a) und 3.4(b) ist dargestellt, wie der Ausgangsdruck der Stützregler e_2 und e_3 von der Aufteilung des einzuspeisenden Flusses $Y = 60 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ auf die Flüsse \hat{q}_1 und \hat{q}_2 abhängt. Bei geöffneten Stützreglern sind diese Ausgangsdrücke von e_2 und e_3 fixiert. In Abbildung 3.5 sind die Höhenlinien der Druckfunktionen für den Ausgangsdruck von e_2 in rot und von e_3 in blau dargestellt. Es wird deutlich, dass es zu jeder Kombination von gesetzten Drücken für die Stützregler e_2 und e_3 nur einen Schnittpunkt der entsprechenden Höhenlinien gibt. Dies bedeutet, dass es für jede Kombination von gesetzten Drücken an den Stützreglern genau eine gültige Aufteilung des Flusses auf die Variablen \hat{q}_1 und \hat{q}_2 gibt.



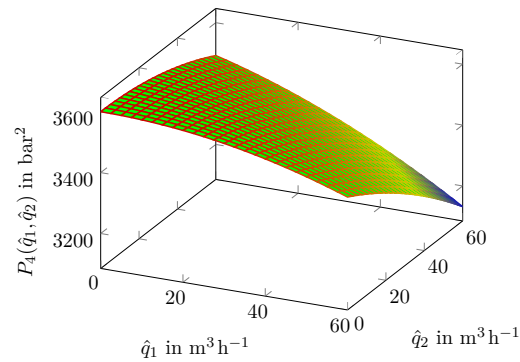
(a) Quadrat des Drucks am Ausgang von Stützregler e_2 (Knoten 1).



(b) Quadrat des Drucks am Ausgang von Stützregler e_3 (Knoten 2).



(c) Quadrat des Drucks an Knoten 3.



(d) Quadrat des Drucks an Knoten 4.

Abbildung 3.4.: Graphen zu den Knotendruckfunktionen im Gebiet \tilde{G}_3 .

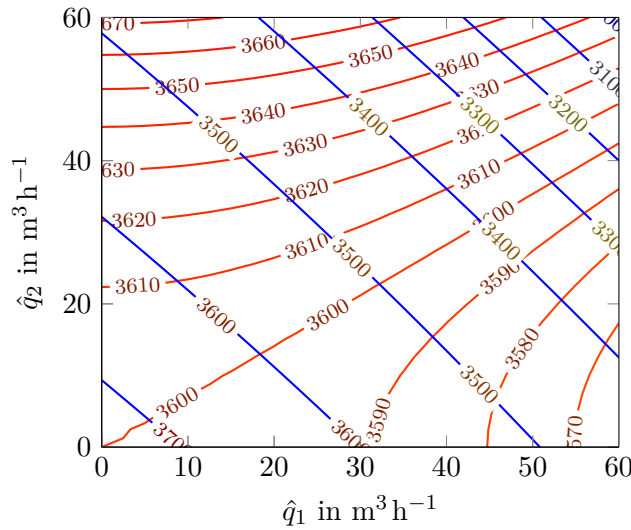


Abbildung 3.5.: Höhenlinien der Druckfunktionen der Stützregler e_2 (rot) und e_3 (blau).

Betrachtung eines Stützreglergebiets \tilde{G}_2 mit Kreis In diesem Abschnitt betrachten wir ein Gebiet \tilde{G}_2 mit einem Kreis. Alle Kanten sind Rohre und das Gebiet wird von zwei Stützreglern aufgespeist. Wir gehen davon aus, dass beide Stützregler geöffnet sind. Daher gilt an ihren Ausgangsknoten ein fixierter Druck. Y sei die Abnahme aller Senken im Inneren des Gebiets. Wir wollen an einem Beispiel verdeutlichen, dass es höchstens eine gültige Aufteilung des Flusses Y auf die beiden Stützregler gibt.

Beispiel

In Bild 3.6 ist ein Gebiet \tilde{G}_2 mit einem Kreis dargestellt. Die rot markierten Ausgangsknoten der Stützregler begrenzen das Gebiet, welches die Stützregler nicht enthält. In grün dargestellt sind die eingespeisten Flüsse an Quellen und in blau die ausgespeisten Flüsse an Senken. Die Kanten a, b, c sind die Baumkanten und Kante n ist die kreisschließende Nichtbaumkante. Beide Stützregler haben einen gesetzten Druck von 20 bar und es gilt $Y = 100 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$. Das Gebiet $\tilde{G}_2 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b, c, n\})$ nach Bestimmung von Knoten 0 als Wurzelknoten führt zusammen mit den Ein- und Ausspeisungen zu:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \hat{q}_1 - 100 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} \text{ und } A_N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $\phi_a = 0,1$, $\phi_b = 0,2$, $\phi_c = 0,3$ und $\phi_n = 0,4$. Für die Berechnung der Drücke an den Knoten 1 bis 3 in Abhängigkeit von der durch \hat{q}_1 bestimmten Flussverteilung und dem Fluss q_n über die Kreiskante n gilt:

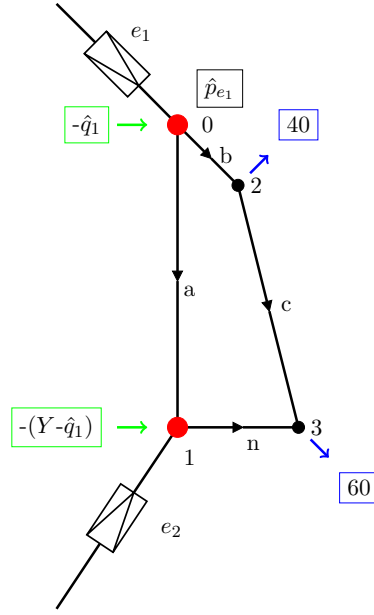


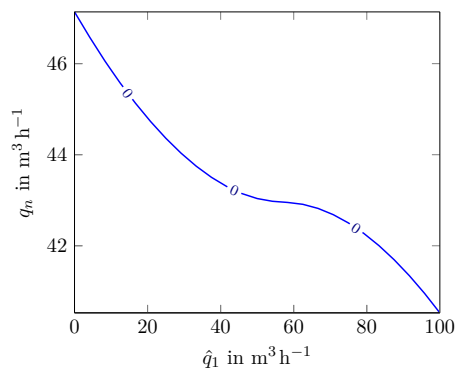
Abbildung 3.6.: Stützreglergebiet \tilde{G}_2 mit Kreis.

$$\begin{aligned}
 P_1(\hat{q}_1, q_n) &= 400 - 0,1(\hat{q}_1 - 100 + q_n)|\hat{q}_1 - 100 + q_n|, \\
 P_2(q_n) &= 400 - 0,2(100 - q_n)|100 - q_n|, \\
 P_3(q_n) &= 400 - 0,2(100 - q_n)|100 - q_n| - 0,3(60 - q_n)|60 - q_n|.
 \end{aligned}$$

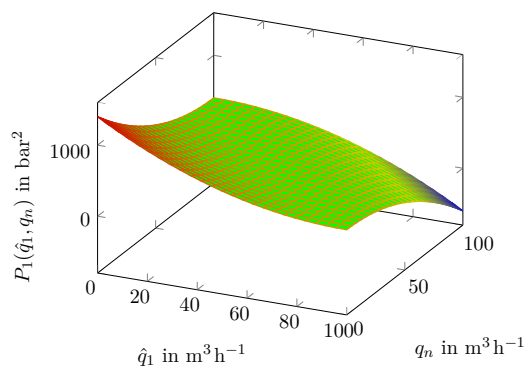
Für die in (3.7) definierte Funktion fordern wir, dass $K(\hat{q}_1, q_n) = 0$ gilt, was dem als Gleichungssystem (2.16) hergeleitetem Druckgleichgewicht im Kreis entspricht.

$$\begin{aligned}
 K(\hat{q}_1, q_n) &= -0,4q_n|q_n| - 0,1(\hat{q}_1 - 100 + q_n)|\hat{q}_1 - 100 + q_n| + 0,2(100 - q_n)|100 - q_n| \\
 &\quad + 0,3(60 - q_n)|60 - q_n|
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

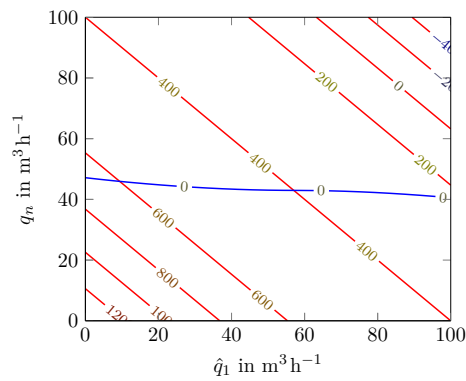
In Abbildung 3.7(a) ist die Höhenlinie der in (3.7) angegebene Funktion $K(\hat{q}_1, q_n)$ zum Nullniveau dargestellt. In Abbildung 3.7(b) ist das Quadrat des Drucks am Ausgang des Stützreglers e_2 in Abhängigkeit von den Flüssen \hat{q}_1 und q_n dargestellt. Wir gehen von geöffneten Stützreglern aus und können daher den Druck am Ausgang von e_2 als fixiert annehmen. In Abbildung 3.7(c) sind die Höhenlinien der Druckfunktion für den Ausgangsknoten von e_2 und die Höhenlinie der Kreisfunktion zum Nullniveau dargestellt. Es ist erkennbar, dass diese sich für jeweils einen fixierten Ausgangsdruck genau einmal schneiden und somit ist die Bestimmung des Flusses \hat{q}_1 jeweils eindeutig.



(a) Höhenlinie von $K(\hat{q}_1, q_n)$ zum Nullniveau.



(b) Quadrat des Drucks am Ausgang von Stützregler e_2 (Knoten 1) in Abhängigkeit von \hat{q}_1 und q_n .



(c) Schnitt der Höhenlinie der Kreisfunktion zum Nullniveau (blau) mit den Höhenlinien der Druckfunktion von Knoten 1 (rot).

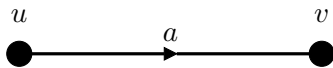
Abbildung 3.7.: Höhenlinie, Funktionsgraph und Schnitt der Höhenlinien von Kreis- und Druckfunktion für Knoten 1.

3.1.2. Allgemeiner Beweis

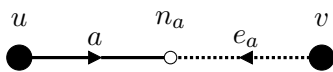
Für jeden der Stützregler $e \in \mathcal{N}$ aus dem Gebiet $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$ ist der Parameter \hat{p}_e gegeben, welcher den geforderten Ausgangsdruck angibt. Wir nehmen an, dass das Stützreglergebiet keine schaltbaren Elemente enthält und alle Rohre in einer Ebene liegen. Im Stützreglergebiet $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$ können konstante Ein- und Ausspeisungen liegen. Die Differenz aus festen Aus- und Einspeisungen Y innerhalb des Gebiets ist positiv, sodass insgesamt Gas in das Gebiet hineinströmen muss, um den Bedarf zu decken. Wir fordern, dass der Druck innerhalb des Gebiets $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$ niedriger ist als an den Eingangsknoten der Stützregler. Diese Forderung ist in der Realität meist erfüllt, weil Stützreglergebiete oft Versorgungsgebiete niedrigen Drucks sind. Diese Gebiete werden über Transportleitungen mit hohem Druck über die Stützregler versorgt. Wir verbieten, dass es zwischen je zwei Stützreglerausgangsknoten ausschließlich Wege aus Kurzschlüssen gibt. Wir zeigen für endlich viele Stützregler, dass die Verteilung des Flusses Y auf diese eindeutig ist. Hierzu konstruieren wir im ersten Schritt einen Hilfsgraph aus dem Originalgraph. Im nächsten Schritt beweisen wir, dass es auf dem Hilfsgraph einen bestimmten Wegtyp geben muss. Mit Hilfe dieses Wegtyps leiten wir auf dem Hilfsgraph einen Widerspruch aus der Annahme her, dass es zwei verschiedene Verteilungen des Flusses Y auf die Stützregler gibt. Die Stützregler sind als Kanten nicht im Gebiet enthalten. Weil wir für den Hilfsgraph nur Knoten ohne Ein- oder Ausspeisung sowie ausschließlich Kurzschlüsse als neue Kanten hinzufügen, können wir folgern, dass die Verteilung auch auf dem Originalgraph eindeutig ist. Den Fluss über einen Stützregler interpretieren wir im Stützreglergebiet als Einspeisung über den Ausgangsknoten des Stützreglers. Diese Knoten können daher als Quellen variabler Einspeisung betrachtet werden. Wir zeigen, dass diese Einspeisungen doch nicht variabel sind und durch Lösen des Gasflussproblems auf dem Stützreglergebiet eindeutig bestimmt werden können.

Konstruktion des Hilfsgraph Gegeben ist der Graph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|} = (\tilde{V}_{|\mathcal{N}|}, E_{|\mathcal{N}|})$, wobei \mathcal{N} die Menge der aufspeisenden Stützregler ist. Wir konstruieren einen Hilfsgraph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}^H$ zu dem Originalgraph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$, indem wir zwischen je zwei adjazente Knoten der Menge $\tilde{V}_{|\mathcal{N}|}$ einen inneren Knoten (Knoten ohne Ein- oder Ausspeisung) sowie eine Hilfskante vom Typ Kurzschluss einfügen. Wir fügen die Hilfskanten so ein, dass alle Originalknoten nur Füße ihrer inzidenten Kanten und alle Hilfsknoten nur Köpfe ihrer inzidenten Kanten sind. Für jede Kante $a = (u, v) \in E_{|\mathcal{N}|}$ führen wir folgende Umformung durch. Der Anfangsknoten der Kante a im Originalgraph sei $u \in \tilde{V}_{|\mathcal{N}|}$ und der Endknoten sei $v \in \tilde{V}_{|\mathcal{N}|}$. Am Kopf der Kante a fügen wir den Hilfsknoten n_a sowie die Hilfskante $e_a = (v, n_a)$ ein.

Original:



Hilfsgraph:



Betrachtet man einen Weg zwischen zwei Originalknoten u und v auf dem Hilfsgraph und verfolgt diesen Weg von Knoten u nach Knoten v , so ändert sich die Richtung der Kanten im Hilfsgraph alternierend von Kante zu Kante. Die Betrachtung des Hilfsgraph reduziert die zu untersuchenden Fallunterscheidungen im Beweis zu Lemma 3.2.

Lemma 3.2

Gegeben sei ein gerichteter, zusammenhängender Graph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|} = (\tilde{V}_{|\mathcal{N}|}, E_{|\mathcal{N}|})$ mit fixierten Volumenflüssen an allen Senken und einigen Quellen sowie einer endlichen Zahl von variablen Volumenflüssen an Quellen. Die Differenz der Ausspeisungen in Senken und der Einspeisungen in fixierten Quellen sei $Y > 0$. Wir bilden gemäß Konstruktion den zugehörigen Hilfsgraph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}^H$ und betrachten auf diesem die Verteilung des Flusses Y auf die endlich vielen Quellen variablen Flusses in zwei Situation. Jede Situation stelle eine Aufteilung des Flusses auf die variablen Quellen dar und beide Situation seien nicht identisch. Der in Situation j eingespeiste Fluss an Quelle i variablen Flusses sei $\hat{q}_i^{(j)} \geq 0$. Wir ordnen den Quellen variablen Flusses die Typen W, M oder G zu:

$$\text{Quelle } i \text{ ist vom Typ } \begin{cases} W, & \text{wenn gilt } \hat{q}_i^{(1)} > \hat{q}_i^{(2)}. \\ M, & \text{wenn gilt } \hat{q}_i^{(1)} < \hat{q}_i^{(2)}. \\ G, & \text{wenn gilt } \hat{q}_i^{(1)} = \hat{q}_i^{(2)}. \end{cases}$$

Der zu Situation j korrespondierende Fluss über Kante l sei $q_l^{(j)}$. Der Kantenfluss kann sowohl positiv als auch negativ sein. Den Kanten ordnen wir die Typen w, m oder g zu:

$$\text{Kante } l \text{ ist vom Typ } \begin{cases} w, & \text{wenn gilt } q_l^{(1)} > q_l^{(2)}. \\ m, & \text{wenn gilt } q_l^{(1)} < q_l^{(2)}. \\ g, & \text{wenn gilt } q_l^{(1)} = q_l^{(2)}. \end{cases}$$

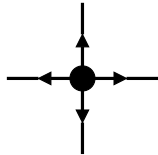
Mit den genannten Bezeichnungen gibt es in jedem Hilfsgraph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}^H$ zwischen zwei nicht identischen Situationen mindestens einen Weg der folgenden Art:

$WwmM, GwmM$ oder $WwmG$, wobei zwischen den beiden Kanten jeweils beliebig viele Knoten mit festem Fluss, Hilfsknoten, Kanten und Hilfskanten liegen können. Die Kantentypen alternieren ($wmwmwm\dots$).

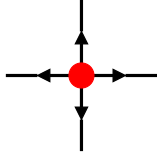
Beweis Wir zeigen, dass es unmöglich ist einen Graph zu konstruieren, indem keiner der Wege $WwmM, GwmM$ oder $WwmG$ beim Übergang von Situation 1 zu Situation 2 existiert.

Legende:

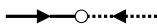
Knoten mit fixiertem Fluss:



Quelle variablen Flusses:



Hilfsknoten, in dem weder aus- noch eingespeist wird:



Hilfskante:



Ein Knoten variablen Flusses ist ein W -Knoten, wenn er in Situation 1 mehr Volumenfluss einspeist als in Situation 2. In Gleichung (2.2) ist die Konstruktion des Ein- und Ausspeisevektors für das nichtlineare Modell aus Kapitel 2 gegeben. Der Einspeisefluss an Quellen wird als negativer Fluss interpretiert, damit sich unter Nutzung von (2.1) für die Konstruktion der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix bei der Einhaltung der Bilanz an Knoten ein positiver Fluss über eine Kante einstellt, wenn Gas vom Eingangsknoten zum Ausgangsknoten dieser Kante strömt.

Wir starten o. B. d. A. mit einem W -Knoten¹. Mindestens einen muss es geben, da Situation 1 und Situation 2 nicht identisch sind. Dies bedeutet, dass sich in mindestens einer Quelle variablen Flusses die Einspeisung verringert, und dementsprechend in mindestens einer Quelle erhöht.

1. Start mit W -Knoten.

W_1

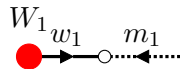


2. Wir fügen eine w -Kante hinzu. Die Menge der zum Knoten W_1 inzidenten Kanten sei Γ_1 . Für die Bilanz an dem Knoten gilt: $\sum_{l \in \Gamma_1} q_l^{(1)} = \hat{q}_{W_1}^{(1)} > \sum_{l \in \Gamma_1} q_l^{(2)} = \hat{q}_{W_1}^{(2)}$ ². Daher existiert mindestens eine inzidente Kante für die gilt $q_l^{(1)} > q_l^{(2)}$. Eine dieser sei die hinzugefügte

¹Wir hätten auch mit einem M -Knoten starten können. Die Durchlaufrihtung ist für die Beweisführung irrelevant.

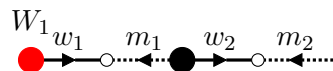
²Die Relation folgt aus $\sum_{l \in \Gamma_1} -q_l^{(1)} = -\hat{q}_{W_1}^{(1)} \Leftrightarrow \sum_{l \in \Gamma_1} q_l^{(1)} = \hat{q}_{W_1}^{(1)}$, weil in der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix der Fuß einer Kante den Matrixeintrag -1 erhält und Flüsse von Quellen als negative Werte interpretiert werden.

w -Kante. Am Kopf der Kante fügen wir einen Hilfsknoten und eine Hilfskante hinzu. Diese muss eine m -Kante sein, da Hilfsknoten innere Knoten sind und genau zwei inzidente Kanten haben. Wir gehen o. B. d. A. davon aus, dass Kante w_1 eine Originalkante ist. Sie könnte auch eine Hilfskante sein. Die weitere Argumentation würde analog folgen. Im weiteren Verlauf des Beweises verzichten wir jeweils auf den Hinweis, dass es beim Einfügen zweier Kanten keine Rolle spielt, ob die erste eine Originalkante oder eine Hilfskante ist. Jeder Hilfsknoten ist inzident zu einer Original- und einer Hilfskante.



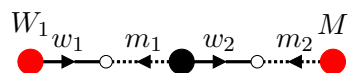
3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Art des Knotens, welchen wir am Fuß von Kante m_1 hinzufügen.

- a) Wir fügen einen Knoten konstanter Ein- oder Ausspeisung hinzu. Da nach unserer Konstruktion bereits eine m -Kante inzident zu dem Knoten ist, muss es auch mindestens eine inzidente w -Kante geben. Diese fügen wir mit Hilfsknoten und Hilfskante hinzu.

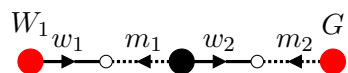


Es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Art des Knotens, welchen wir am Fuß von m_2 hinzufügen.

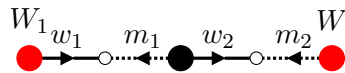
- i. Wir fügen eine M -Quelle variablen Flusses hinzu und haben einen $WwmM$ -Weg gefunden.



- ii. Wir fügen eine G -Quelle variablen Flusses hinzu und haben einen $WwmG$ -Weg gefunden.

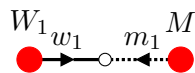


- iii. Wir fügen eine W -Quelle variablen Flusses hinzu und enden in der gleichen Ausgangssituation wie in Schritt 1.

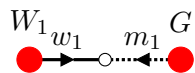


b) Wir fügen am Fuß von m_1 eine Quelle variablen Flusses hinzu. Es gibt verschieden Möglichkeiten für den Typ dieser Quelle.

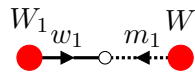
i. Wir fügen eine M -Quelle variablen Flusses hinzu und haben einen $WwmM$ -Weg gefunden.



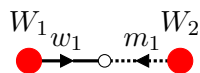
ii. Wir fügen eine G -Quelle variablen Flusses hinzu und haben einen $WwmG$ -Weg gefunden.



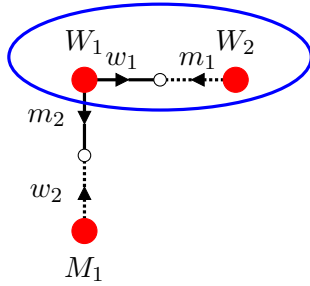
iii. Wir fügen eine W -Quelle variablen Flusses hinzu und enden in der gleichen Ausgangssituation wie in Schritt 1.



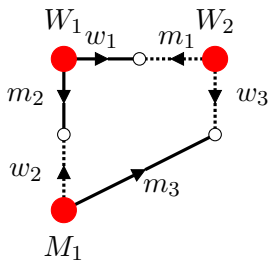
4. In den Fällen iii. von 3.a) und 3.b) haben wir keinen Weg der gesuchten Art gefunden. Die jeweiligen Graphen können nur Teilgraphen des Hilfsgraph sein, weil der Fluss Y für beide Situationen identisch ist. Daher muss es mindestens einen M -Knoten geben. Wir nutzen o. B. d. A. den Zustand iii. aus 3.b) statt den Zustand iii. aus 3.a) für die weiteren Schritte.



Wir verbinden den M -Knoten o. B. d. A. mit Knoten W_1 statt mit Knoten W_2 . Wählen wir den Weg wie in i. aus 3.a) oder 3.b) beschrieben, so haben wir einen Weg der gesuchten Form gefunden. Wir beginnen daher mit einer m -Kante und fügen den Hilfsknoten und die Hilfskante hinzu. Wir nehmen an, dass am Fuß der Hilfskante der M -Knoten M_1 liegt. Analog zu 3.a) könnten auch Knoten fester Ein- oder Ausspeisung zwischen W_1 und M_1 liegen.

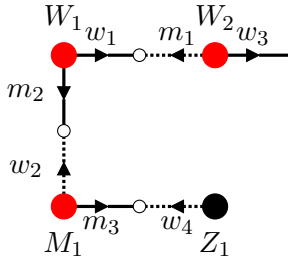


Über den gebildeten Weg von W_1 nach M_1 kann der Fluss, welcher im blauen Gebiet weniger eingespeist wird nicht von der Quelle M_1 ins blaue Gebiet gelangen. Über Kante w_2 fließt in Situation 2 weniger Gas als in Situation 1 in das blaue Gebiet. Innerhalb des blauen Gebiets wird aber durch die W -Knoten in Situation 2 weniger eingespeist als in Situation 1. Der Volumenfluss, welcher in Knoten M_1 in Situation 2 mehr eingespeist wird als in Situation 1 kann nicht über Kante w_2 in das blaue Gebiet gelangen. Daher kann der Graph nur ein Teilgraph sein und es muss einen Weg von M_1 in einen Originalknoten aus dem blauen Gebiet geben, der bei M_1 mit einer m -Kante beginnt und im blauen Gebiet bei einem W -Knoten endet. Die genutzte zum W -Knoten inzidente Kante muss eine w -Kante sein. O. B. d. A. führe dieser Weg von M_1 zu W_2 statt zu W_1 .

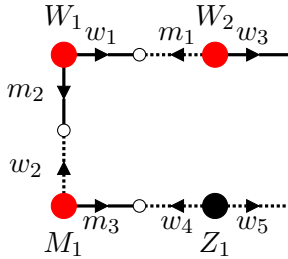


5. Es bleibt zu zeigen, dass die Kantentypen auf diesem Weg von M_1 zu W_2 alternierend sind, um einen Weg der geforderten Art zu erhalten. Dazu nehmen wir an, dass es mindestens einen Knoten vom Grad größer 2 auf diesem Weg gibt. Gibt es nur Knoten vom Grad 2 festen Flusses zwischen M_1 und W_2 haben wir den gewünschten Weg gefunden. Ebenso haben wir den gewünschten Weg gefunden, wenn es nur einen Hilfsknoten auf diesem Weg zwischen M_1 und W_2 gibt wie im letzten Bild in Schritt 4 dargestellt.

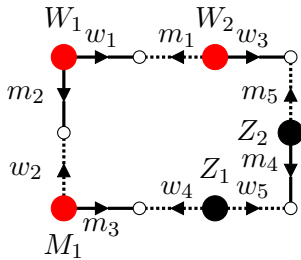
Wir gehen also von mindestens einem Knoten vom Grad größer 2 aus und fügen einen Hilfsknoten sowie eine Hilfskante ein. O. B. d. A. beginnen wir die Darstellung des Wegs bei Knoten M_1 statt bei Knoten W_2 .



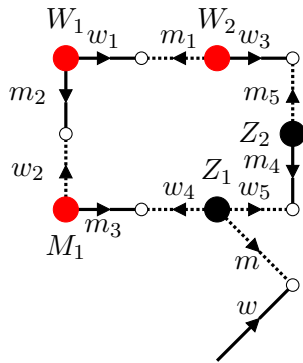
Da ein Hilfsknoten ein innerer Knoten ist, muss auf eine inzidente m -Kante eine w -Kante folgen. Wir versuchen einen Weg von M_1 nach W_2 zu erzeugen, der Kanten gleichen Typs in direkter Folge enthält. Andernfalls hätten wir einen der gesuchten Wegtypen gefunden. Wir gehen also davon aus, dass die Kante, welche aus Knoten Z_1 auf dem Weg nach Knoten W_2 liegt, eine w -Kante ist.



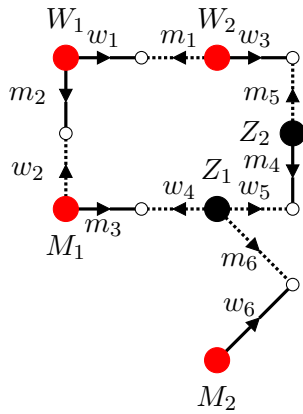
Um den Weg zwischen Z_1 und W_2 zu schließen, müssen wir einen weiteren Knoten einfügen. Dieser Knoten kann kein Knoten festen Flusses vom Grad 2 sein, weil zwei m -Kanten aufeinander treffen und daher die Bilanz nicht erfüllt wäre. Wir fügen erneut einen Knoten vom Grad größer 2 und die zugehörigen Hilfsknoten sowie die Hilfskante ein.



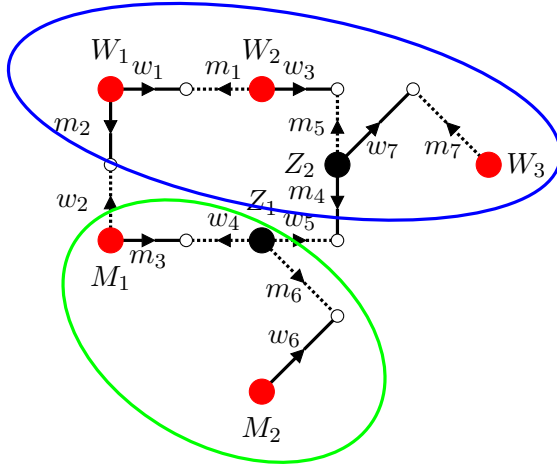
Nun sind die Knoten M_1 und W_2 verbunden und der Verbindungsweg ist nicht von einem der gesuchten Typen. An den Knoten Z_1 und Z_2 muss es jeweils mindestens eine zusätzliche m - bzw. w -Kante zum Ausgleich der Bilanz geben, weil diese Knoten in Situation 1 und Situation 2 jeweils die gleiche Ein- oder Ausspeisung besitzen. Wir betrachten Knoten Z_1 und fügen eine m -Kante sowie den Hilfsknoten und die Hilfskante hinzu.



Fügen wir an den Fuß der Hilfskante einen W - oder einen G -Knoten an, so haben wir einen der gesuchten Wegtypen gefunden ($WwmM$ oder $GwmM$). Wir fügen also einen M -Knoten hinzu.



Analog fügen wir an den Knoten Z_2 eine w -Kante und einen W -Knoten mit Hilfskante und Hilfsknoten an.



Wir betrachten nun die Wege zwischen W -Knoten des blauen Gebiets und M -Knoten des grünen Gebiets, welche keine weiteren Quellen variablen Flusses enthalten außer den Start- und Endknoten. Wir haben schon festgestellt, dass über den Weg von W_1 zu M_1 kein Bilanzausgleich möglich ist. Analog gilt dies für den Weg von W_3 zu M_2 oder M_1 sowie für den Weg von W_2 zu M_2 , weil die inzidente Kante m_7 von Knoten W_3 eine m -Kante ist und die inzidente Kante w_6 von Knoten M_2 eine w -Kante. Auf dem Weg von W_2 zu M_1 ist ebenfalls kein Ausgleich der Flüsse zwischen dem blauen und dem grünen Gebiet möglich, weil jeweils die m -Kanten m_5 und m_4 sowie die w -Kanten w_5 und w_4 aufeinander treffen. Dies führt dazu, dass der Fluss, welcher in Situation 2 in Knoten M_1 zusätzlich zu dem Fluss aus Situation 1 eingespeist wird, nicht über diesen Weg zu Knoten W_2 gelangen kann. Der Graph kann also immer noch nur ein Teilgraph des Hilfsgraph sein. Es muss also einen Weg von einem W -Knoten aus dem blauen Gebiet zu einem M -Knoten aus dem grünen Gebiet geben, der am W -Knoten mit einer w -Kante beginnt, am M -Knoten mit einer m -Kante endet und alternierend ist.

Somit haben wir gezeigt, dass es immer mindestens einen Weg der Form $WwmM$, $GwmM$ oder $WwmG$ gibt. □

Satz 3.3

Gegeben sei ein Stützreglergebiet $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|} = (\tilde{V}_{|\mathcal{N}|}, E_{|\mathcal{N}|})$, welches von den Stützreglern der Menge \mathcal{N} mit jeweils gegebenem geforderten Druck $\hat{p}_e \forall e \in \mathcal{N}$ aufgespeist wird. Der Druck innerhalb des Stützreglergebiets sei niedriger als der Druck an den Eingangsknoten der Stützregler. Es sei verboten, dass es zwischen je zwei Stützreglerausgangsknoten ausschließlich Wege aus Kurzschlüssen gibt. Innerhalb des Gebiets werde die Differenz aus Einspeisungen und Ausspeisungen $Y > 0$ ausgespeist, welche über die Stützregler in das Gebiet transportiert werden muss. Bei horizontalen Kanten ohne schaltbare Elemente im Stützreglergebiet ist die Verteilung des Flusses Y auf die Stützregler der Menge \mathcal{N} eindeutig, sobald ein zulässiger Fluss existiert.

Beweis Nach Lemma 3.2 existiert ein Weg der Art $WwmM$, $GwmM$ oder $WwmG$ auf dem Hilfsgraph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}^H$. Mit Hilfe dieser spezieller Wegtypen wollen wir einen Widerspruch auf dem Hilfsgraph zur Annahme, dass die Verteilung von Y auf die Stützregler nicht eindeutig ist, herleiten. Bei der Konstruktion des Hilfsgraph wurden nur innere Knoten und Kurzschlüsse hinzugefügt. Diese haben keine Auswirkung auf den Druckverlust über einem Weg. Daher können wir von einem Widerspruch auf dem Hilfsgraph auf einen Widerspruch auf dem Originalgraph schließen.

Da wir voraussetzen, dass auf jeder Verbindung zwischen zwei Stützreglern mindestens eine Kante vom Typ Rohr ist, gehen wir im Folgenden o. B. d. A. davon aus, dass alle Originalkanten Rohre sind. Hilfskanten sind jedoch weiterhin Kurzschlüsse, bei denen kein Druckverlust stattfindet und werden im weiteren Beweis nicht erwähnt.

Für jeden Stützregler $e \in \mathcal{N}$ mit Eingangsknoten u , Ausgangsknoten v und gefordertem Ausgangsdruck \hat{p}_e gilt³:

$$p_v \leq \hat{p}_e \wedge p_u > \hat{p}_e \Leftrightarrow p_v = \hat{p}_e \wedge q_e \geq 0 \quad (3.8)$$

$$p_v \leq \hat{p}_e \wedge p_u \leq \hat{p}_e \Leftrightarrow p_v = p_u \quad (3.9)$$

$$p_v > \hat{p}_e \Rightarrow q_e = 0 \quad (3.10)$$

Wir nehmen an, dass es zwei verschiedene Aufteilungen $\hat{q}_1^{(1)}, \dots, \hat{q}_{|\mathcal{N}|}^{(1)}$ und $\hat{q}_1^{(2)}, \dots, \hat{q}_{|\mathcal{N}|}^{(2)}$ von Y auf die Stützregler der Menge \mathcal{N} gibt mit:

$$\sum_{e=1}^{|\mathcal{N}|} \hat{q}_e^{(1)} = \sum_{e=1}^{|\mathcal{N}|} \hat{q}_e^{(2)} = Y.$$

$\hat{q}_e^{(j)}$ ist der Fluss über Stützregler e in Situation j . Des Weiteren nehmen wir an, dass Knoten W der Kopf von Stützregler a ist und Knoten M der Kopf von Stützregler b . $p_i^{(j)}$ ist der Druck an Knoten i in Situation j . Es gilt mit einem geforderten Druck an Stützregler a von \hat{p}_a und einem geforderten Druck an Stützregler b von \hat{p}_b wegen (3.8) und (3.10) für die Drücke an den Knoten W und M in den Situationen 1 und 2:

$$p_W^{(1)} = \hat{p}_a \leq p_W^{(2)} \quad (3.11)$$

$$p_M^{(1)} \geq \hat{p}_b = p_M^{(2)}, \quad (3.12)$$

sowie für die Flüsse über die Stützregler:

$$\hat{q}_a^{(1)} > \hat{q}_a^{(2)} \quad (3.13)$$

$$\hat{q}_b^{(1)} < \hat{q}_b^{(2)}. \quad (3.14)$$

Für alle w - und m -Kanten gilt:

$$q_w^{(1)} > q_w^{(2)} \quad (3.15)$$

$$q_m^{(1)} < q_m^{(2)}. \quad (3.16)$$

³Siehe Umsetzung der Bedingungen in unserem Modell in Abschnitt 2.2.3.

Es genügt einen Widerspruch für o. B. d. A. den Typ $WwmM$ zu finden. Für die anderen Wegtypen ergeben sich die Widersprüche analog. Wir betrachten nun die Änderung der Drücke auf diesem gefundenen, alternierenden Weg ausgehend von Knoten W .

Auf Rohren gelten wegen der Druckabfallsgleichung (2.4) die Folgerungen:

- I) Bei weniger Fluss über ein Rohr und gleichem oder erhöhtem Druck am Eingangsknoten wird der Druck am Ausgangsknoten größer.
- II) Bei gleichbleibendem oder erhöhtem Druck am Ausgangsknoten, folgt aus größerem Fluss ein größerer Druck am Eingangsknoten.

Durch die Konstruktion des Hilfsgraph sind alle w -Kanten auf dem betrachteten Weg von W nach M vorwärts gerichtet, sodass für sie Folgerung I relevant ist. Alle m -Kanten sind rückwärtsgerichtet, sodass für sie Folgerung II relevant ist. \mathcal{T} sei die Menge der Knoten, welche auf dem von uns betrachteten $WwmM$ -Weg von Knoten W zu Knoten M liegen. Der Startknoten W und der Endknoten M sind ebenfalls in der Menge \mathcal{T} enthalten.

Wegen (3.11), (3.15) und Folgerung I gilt für den Ausgangsknoten v der auf dem betrachteten Weg liegenden w -Kante, welche inzident zu Knoten W ist:

$$p_v^{(1)} < p_v^{(2)}. \quad (3.17)$$

Für den Eingangsknoten c der auf dem Weg liegenden zu Knoten v inzidenten m -Kante gilt wegen (3.16), (3.17) und Folgerung II:

$$p_c^{(1)} < p_c^{(2)}.$$

Analog gilt $p_i^{(1)} < p_i^{(2)} \quad \forall i \in \mathcal{T}$.

Insbesondere muss dann auch gelten $p_M^{(1)} < p_M^{(2)}$, was im Widerspruch zu (3.12) steht.

□

Wir haben gezeigt, dass auf dem Hilfsgraph $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}^H$ die Aufteilung des Flusses, welcher in ein Stützreglergebiet hineinfließt, auf die Stützregler eindeutig ist, sofern eine zulässige Aufteilung existiert. Weil bei der Konstruktion des Hilfsgraph nur Kurzschlüsse und innere Knoten hinzugefügt werden, kann die Eindeutigkeit der Aufteilung auf den Originalgraph übertragen werden. Die Begründung hierfür ist, dass sich der Druck des Gases beim Strömen über einen Kurzschluss nicht verändert.

Dieses Resultat erlaubt eine Dekomposition von Netzen mit Stützreglergebieten sowie die separate Berechnung dieser Gebiete. Die Dekomposition von Gasnetzen ist sehr hilfreich für die Berechenbarkeit großer Netze. Nach der Bestimmung der Flüsse über die Stützregler in jedem Stützreglergebiet wird ein verkleinertes Originalnetz berechnet, indem die Gebiete entfernt und die berechneten Flüsse über die Stützregler fixiert werden. Das genaue Vorgehen wurde bereits zu Beginn des Abschnitts 3.1 beschrieben. Die mit Hilfe der Dekomposition erreichten Ergebnisse auf realen Netzen werden in Abschnitt „Ergänzte statistische Szenarien mit Dekomposition“ des Kapitels 5.3.3 beschrieben.

3.2. Koerzive Operatoren

Die bei der Variablenreduktion in Kapitel 2.1 entstandenen Gleichungen weisen mathematische Strukturen auf, die bereits für sich genommen interessant sind, und darüber hinaus bei Untersuchungen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen im Gesamtnetz oder in separierten Teilnetzen hilfreich sind. Wir stellen diese Strukturen vor und wählen zur Einordnung den Satz von Browder und Minty bzw. den Hauptsatz über monotone Operatoren als übergreifende Aussage.

3.2.1. Einführung in die Theorie

Dieser Einführung liegt die Monographie [56] von M. Růžička zu Grunde.

Ein Banachraum ist ein vollständiger, normierter Vektorraum $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder komplexen Zahlen mit einer Norm $\|\cdot\|$. \mathcal{B} heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge aus \mathcal{B} einen Grenzwert in \mathcal{B} hat. Der Operator T definiere eine Abbildung

$$T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*.$$

\mathcal{B}^* sei der Dualraum zu \mathcal{B} d.h., die Menge aller linearer Abbildungen von \mathcal{B} nach \mathbb{K} . Ein Raum wird reflexiv genannt, wenn die kanonische Inklusionsabbildung in den Dualraum seines Dualraums ein Isomorphismus ist. Die kanonische Inklusionsabbildung wird auch natürliche Einbettung genannt und bedeutet, dass durch sie jedes Element des Urbildraums auf sich selber im Bildraum abgebildet wird. Der Banachraum \mathcal{B} heißt separabel, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge gibt, welche dicht in \mathcal{B} liegt. Dies bedeutet, dass man jedes Element aus \mathcal{B} beliebig genau durch ein Element der Teilmenge approximieren kann. Die Begriffe Hemistetigkeit, Monotonie und Koerzivität für Operatoren werden in den Definitionen 3.4, 3.5 und 3.6 gegeben.

Definition 3.4 Hemistetigkeit

Ein Operator $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ heißt *hemistetig*, falls die Abbildung

$$x \mapsto \langle T(a + xb), c \rangle_{\mathcal{B}} \quad (3.18)$$

im Intervall $[0, 1]$ für alle $a, b, c \in \mathcal{B}$ stetig ist.

Definition 3.5 Monotonie

Ein Operator $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ heißt *monoton*, falls gilt:

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{B} \quad (3.19)$$

und strikt monoton, falls gilt:

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle > 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{B} \text{ mit } x \neq y. \quad (3.20)$$

Definition 3.6 Koerzivität

Ein Operator $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ heißt *koerziv*, falls gilt:

$$\frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|} \rightarrow \infty \quad \text{wenn } \|x\| \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Der Hauptsatz über monotone Operatoren (Satz 3.7) liefert eine allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Lösungen von Operatorgleichungen.

Satz 3.7 Satz von Browder und Minty 1963

Sei der Banachraum \mathcal{B} separabel und reflexiv mit einer Basis $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Wenn der Operator $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ hemistetig, monoton und koerziv ist gilt für die Gleichung

$$Tx = a \quad (3.22)$$

$\forall a \in \mathcal{B}^* \exists \bar{x}$ mit $T\bar{x} = a$.

Falls T strikt monoton ist, ist die Lösung von (3.22) eindeutig.

Wir betrachten in dieser Dissertationsschrift ein stationäres Gasflussmodell, für welches wir im folgenden Abschnitt Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen unter bestimmten Voraussetzungen treffen wollen. Bei der Betrachtung stationärer Gasflüsse erweisen sich die endlichdimensionalen Spezialfälle obiger Definitionen als hilfreich. Die Existenz von Lösungen können wir im Endlichdimensionalen mit Hilfe einer Folgerung aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen, bei welcher im Gegensatz zum Hauptsatz über monotone Operatoren auf die Monotonie als Voraussetzung verzichtet werden kann.

3.2.2. Ein Operator im Gasflussmodell für die Kreisgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Systeme (2.14) und (2.16) unter bestimmten Voraussetzungen beweisen. Die Eindeutigkeit der Flussverteilung auf Nichtbaumkanten ist besonders auf passiven⁴ Teilnetzen eine wichtige Eigenart des Systems (2.16). Zusammen mit der Fixierung des Drucks im Wurzelknoten bedeutet sie, dass sowohl der Fluss über alle Kanten im Netz als auch der Druck an allen Knoten eindeutig bestimmt sind. Verdichterstationen, Regler und Widerstände fassen wir als „aktive Elemente“ zusammen. In Netzen mit aktiven Elementen müssen zusätzlich zum Druck im Wurzelknoten die Druckdifferenzen d_N und d_B (siehe Definition (2.8)) dieser Elemente fixiert werden, damit das gegebene System von Kreisgleichungen eindeutig ist. Eine Variante des Eindeutigkeitsbeweises in rein passiven Netzen wurde von J. Szab in [65, Abschnitt 2.3] durchgeführt.

⁴Netze, welche ausschließlich aus Knoten, Rhren und Kurzschlüssen bestehen.

Für den Existenzbeweis, welchen wir mit Hilfe eines koerziven Operators auf Gasnetzen durchführen, genügt die Betrachtung eines Operators $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}^{|N|}$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen. Im Folgenden definieren wir diesen Operator \mathcal{F} . Das zu betrachtende Gleichungssystem ist (siehe (2.16)):

$$A_N^\top A_B^{-\top} \left[\phi_B \left| A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N \right| (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N) + d_B \right] = \phi_N |q_N| q_N + d_N \quad (3.23)$$

mit folgender Definition für die Druckdifferenzen d_N und d_B (siehe (2.8)):

$$d_e = \begin{cases} p_u^2 - p_v^2 & , \text{ falls Kante } e = (u, v) \text{ ein aktives Element ist.} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für den Eindeutigkeitsbeweis nehmen wir an, dass die Komponenten von d_N und d_B , d. h., die Druckdifferenzen in aktiven Elementen, fixiert sind. Wir formen Gleichung (3.23) so um, dass die fixierten Komponenten auf der rechten Seite des Gleichungssystems stehen und die linke Seite von dem Variablenvektor q_N abhängt:

$$\underbrace{\phi_N |q_N| q_N - A_N^\top A_B^{-\top} \left[\phi_B |A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N| (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N) \right]}_{=: \mathcal{F}(q_N)} = \underbrace{A_N^\top A_B^{-\top} d_B - d_N}_{=: \psi}. \quad (3.24)$$

Aus Gründen der einfacheren Darstellung definieren wir eine Abbildung \mathcal{S} für eine gegebene Teilmenge $M \subseteq E$:

$$\mathcal{S}_M : \mathbb{R}^{|M|} \rightarrow \mathbb{R}^{|M|}, \quad \mathcal{S}_M(x) := \begin{pmatrix} |x_1| x_1 \\ \vdots \\ |x_{|M|}| x_{|M|} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Die Menge aller Kanten E ist aufgeteilt in Baumkanten B und Nichtbaumkanten N . Es gilt also $B \cup N = E$ sowie $B \cap N = \emptyset$ und wir vereinfachen $\mathcal{F}(q_N)$ aus Formel (3.24) zu:

$$\mathcal{F}(q_N) = \Phi_N \mathcal{S}_N(q_N) - A_N^\top A_B^{-\top} \Phi_B \mathcal{S}_B(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N q_N), \quad (3.26)$$

wobei Φ_B und Φ_N Diagonalmatrizen sind, für die gilt $\Phi_B := \begin{pmatrix} \phi_{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_{B_{|B|}} \end{pmatrix}$ und

$\Phi_N := \begin{pmatrix} \phi_{N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_{N_{|N|}} \end{pmatrix}$. Wir formen System (3.26) weiter um, wobei \mathbb{I}_N die Einheitsmatrix

der Dimension $|N|$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(q_N) &= \Phi_N \mathcal{S}_N(q_N) - A_N^\top A_B^{-\top} \Phi_B \mathcal{S}_B(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N q_N) \\
&\quad (\mathcal{S}(-x) = -\mathcal{S}(x)) \\
&= \Phi_N \mathcal{S}_N(q_N) + A_N^\top A_B^{-\top} \Phi_B \mathcal{S}_B(A_B^{-1}A_N q_N - A_B^{-1}b) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_N | A_N^\top A_B^{-\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_N \mathcal{S}_N(q_N) \\ \Phi_B \mathcal{S}_B(A_B^{-1}A_N q_N - A_B^{-1}b) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_N | A_N^\top A_B^{-\top} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{N_1} | q_1 | q_1 \\ \vdots \\ \phi_{N_{|N|}} | q_{|N|} | q_{|N|} \\ \phi_{B_1} | A_B^{-1}A_N q_N - A_B^{-1}b |_1 [A_B^{-1}A_N q_N - A_B^{-1}b]_1 \\ \vdots \\ \phi_{B_{|B|}} | A_B^{-1}A_N q_N - A_B^{-1}b |_{|B|} [A_B^{-1}A_N q_N - A_B^{-1}b]_{|B|} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_N | A_N^\top A_B^{-\top} \end{bmatrix} \Phi_E \mathcal{S}_E \left(\begin{bmatrix} \mathbb{I}_N q_N - 0_N \\ A_B^{-1}A_N q_N - A_B^{-1}b \end{bmatrix} \right) \\
\mathcal{F}(q_N) &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_N | A_N^\top A_B^{-\top} \end{bmatrix} \Phi_E \mathcal{S}_E \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{I}_N \\ A_B^{-1}A_N \end{bmatrix}}_{=:G} q_N - \underbrace{\begin{bmatrix} 0_N \\ A_B^{-1}b \end{bmatrix}}_{=:g} \right). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\Phi_E := \begin{pmatrix} \phi_{N_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \phi_{N_{|N|}} & & \\ & & & \phi_{B_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \phi_{B_{|B|}} \end{pmatrix}$$

und 0_N sei ein $|N|$ dimensionaler Spaltenvektor mit Nulleinträgen. Unter der Verwendung von $A_N^\top A_B^{-\top} = (A_B^{-1}A_N)^\top$ vereinfachen wir die Darstellung (3.27) des Operators $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}^{|N|}$ weiter:

$$\boxed{\mathcal{F}(q_N) = G^\top \Phi_E \mathcal{S}_E(G q_N - g)} \tag{3.28}$$

Nun zeigen wir, dass der Operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}^{|N|}$ stetig und koerziv ist.

Satz 3.8

Der Operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}^{|N|}$ ist stetig und koerziv.

Beweis

1. Die *Stetigkeit* des Operators \mathcal{F} lässt sich ableiten aus der Stetigkeit des Operators \mathcal{S} , welcher in (3.25) definiert ist. Dieser ist stetig, da die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|x$ stetig ist. In der Darstellung (3.26) des Operators \mathcal{F} wird deutlich, dass er sich als Verkettung von \mathcal{S} und weiterer linearer Operatoren darstellen lässt und somit selber stetig ist.
2. *Koerzivität*: Gemäß Definition (3.28) gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathcal{F}(q), q \rangle}{\|q\|} &= \frac{\langle G^\top \Phi_E \mathcal{S}_E(Gq - g), q \rangle}{\|q\|} \\
&= \frac{1}{\|q\|} \left(G^\top \Phi_E \mathcal{S}_E(Gq - g) \right)^\top q \\
&= \frac{1}{\|q\|} \left[q^\top \left(G^\top \Phi_E \mathcal{S}_E(Gq - g) \right) \right]^\top \\
&= \frac{1}{\|q\|} q^\top G^\top \Phi_E \mathcal{S}_E(Gq - g) \\
&= \frac{1}{\|q\|} (Gq)^\top \Phi_E \mathcal{S}_E(Gq - g) \\
&= \frac{1}{\|q\|} \sum_{i=1}^{|E|} [Gq]_i \phi_i |[Gq]_i - g_i| ([Gq]_i - g_i). \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Der i -te Summand von Gleichung (3.29) ist genau dann negativ, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$0 < [Gq]_i < g_i \tag{3.30}$$

oder

$$g_i < [Gq]_i < 0. \tag{3.31}$$

Wir definieren zwei Schranken zur Abschätzung der Summe in Gleichung (3.29). Eine obere Schranke $\zeta := \max_i |g_i|$ für den Betrag der Einträge g_i und eine obere Schranke $\Phi := \max_i \phi_i$ für die Koeffizienten ϕ_i , welche per Definition nicht negativ sind. Folgende Abschätzung gilt für positive Terme der Summe (3.29):

$$[Gq]_i \phi_i |[Gq]_i - g_i| ([Gq]_i - g_i) \geq -\Phi \zeta^3. \tag{3.32}$$

Für negative Terme aus (3.29), in denen $[Gq]_i$ (3.30) erfülle, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{ccc}
[Gq]_i \phi_i |[Gq]_i - g_i| ([Gq]_i - g_i) & \begin{array}{c} \phi_i \leq \Phi \\ \geq \\ 0 < [Gq]_i < g_i \leq \zeta \\ \geq \\ 0 > [Gq]_i - g_i \geq [Gq]_i - \zeta \geq -\zeta \\ \geq \end{array} & \begin{array}{c} [Gq]_i \Phi |[Gq]_i - g_i| ([Gq]_i - g_i) \\ \zeta \Phi |[Gq]_i - g_i| ([Gq]_i - g_i) \\ -\Phi \zeta^3. \end{array}
\end{array} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Für negative Terme aus (3.29), in denen $[Gq]_i$ (3.31) erfülle, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& [Gq]_i \phi_i | [Gq]_i - g_i | ([Gq]_i - g_i) \quad \begin{array}{l} \phi_i \leq \Phi \\ \geq \end{array} \quad [Gq]_i \Phi | [Gq]_i - g_i | ([Gq]_i - g_i) \\
& \quad \quad \quad \begin{array}{l} 0 > [Gq]_i > g_i \geq -\zeta \\ \geq \end{array} \quad -\zeta \Phi | [Gq]_i - g_i | ([Gq]_i - g_i) \\
& \quad \quad \quad \begin{array}{l} 0 < [Gq]_i - g_i \leq [Gq]_i - (-\zeta) \leq \zeta \\ \geq \end{array} \quad -\Phi \zeta^3.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

(3.32) - (3.34) erlauben eine Abschätzung von (3.29) nach unten:

$$\sum_{i=1}^{|E|} [Gq]_i \phi_i | [Gq]_i - g_i | ([Gq]_i - g_i) \geq -\Phi \zeta^3 |E|. \tag{3.35}$$

Abschließend wollen wir zeigen, dass $\frac{\langle \mathcal{F}(q), q \rangle}{\|q\|}$ gegen Unendlich strebt für $\|q\| \rightarrow \infty$. Dazu definieren wir einen beliebigen Häufungspunkt q^* der Folge $\frac{q^\nu}{\|q^\nu\|}$. Offensichtlich gilt für diesen $\|q^*\| = 1$. Nach der Definition von G muss also $Gq^* \neq 0$ gelten, weil $Gq^* = 0$ nur möglich ist für $q^* = 0$. Letzteres widerspricht der Definition von q^* und der daraus resultierenden Gleichung $\|q^*\| = 1$. Es existiert also ein j mit $[Gq^*]_j \neq 0$.

Annahme: $[Gq^*]_j > 0$.

Nach der Definition von q^* gilt auch $[Gq^\nu]_j > 0$ für genügend großes ν . Dieses $[Gq^\nu]_j > 0$ muss unbeschränkt sein für $\nu \rightarrow \infty$, da sonst gelten würde:

$$\frac{[Gq^\nu]_j}{\|q^\nu\|} \rightarrow 0. \tag{3.36}$$

Es gilt aber

$$\frac{[Gq^\nu]_j}{\|q^\nu\|} = G_j \frac{[q^\nu]}{\|q^\nu\|} \rightarrow G_j q^* = [Gq^*]_j. \tag{3.37}$$

Unsere Annahme ist aber, dass $[Gq^*]_j > 0$ also muss $[Gq^\nu]_j$ unbeschränkt sein, da wir sonst mit Hilfe von (3.37) einen Widerspruch gefunden hätten. Da $[Gq^\nu]_j$ unbeschränkt und positiv ist gilt

$$([Gq^\nu]_j - g_j) \rightarrow \infty, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

und daraus folgend

$$\underbrace{\Phi_j | [Gq^\nu]_j - g_j | ([Gq^\nu]_j - g_j)}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\frac{[Gq^\nu]_j}{\|q^\nu\|}}_{\rightarrow [Gq^*]_j > 0} \rightarrow \infty.$$

Annahme: $[Gq^*]_j < 0$.

Mit den Begründungen (3.36) und (3.37) folgt erneut die Unbeschränktheit von $[Gq^\nu]_j$. Da $[Gq^\nu]_j$ unbeschränkt und negativ ist gilt

$$([Gq^\nu]_j - g_j) \rightarrow -\infty, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

und daraus folgend

$$\underbrace{\Phi_j|[Gq^\nu]_j - g_j|([Gq^\nu]_j - g_j)}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{[Gq^\nu]_j}{\|q^\nu\|}}_{\rightarrow [Gq^*]_j < 0} \rightarrow \infty.$$

Wir haben nun gezeigt, dass immer mindestens ein Term in der Summe (3.29) existieren muss, welcher gegen ∞ strebt, wenn gilt $\|q\| \rightarrow \infty$. Abschätzung (3.35) zeigt, dass alle negativen Terme gegen 0 streben müssen. Dies führt dazu, dass die Summe gegen ∞ strebt. Es gilt also

$$\frac{\langle \mathcal{F}(q), q \rangle}{\|q\|} \rightarrow \infty, \text{ für } \|q\| \rightarrow \infty.$$

□

Als weitere interessante Eigenschaft des Operators $\mathcal{F}(q_N)$ zeigen wir im Folgenden, dass er monoton ist.

Satz 3.9

Der Operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}^{|N|}$ ist monoton.

Beweis Für die Jacobimatrix des Operators $\mathcal{F}(q_N)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(q_N) &= G^\top \Phi_E \mathcal{S}'_E(Gq_N - g)G \\ &= 2G^\top \Phi_E \Delta(Gq_N - g)G, \end{aligned} \quad (3.38)$$

mit

$$\Delta : \mathbb{R}^{|E|} \rightarrow \mathbb{R}^{|E| \cdot |E|}, \quad \Delta(t) := \begin{pmatrix} |t_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |t_{|E|}| \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Gegeben seien zwei beliebige Vektoren $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^{|N|}$. Nach einer Version des multidimensionalen Mittelwertsatzes aus [29, Seite 280] muss ein $\theta = \theta(q_1, q_2) \in [q_1, q_2]$ existieren mit

$$\mathcal{F}(q_1) - \mathcal{F}(q_2) = \mathcal{F}'(\theta)(q_1 - q_2). \quad (3.40)$$

Wir zeigen die Monotonie gemäß Definition 3.5:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(q_1) - \mathcal{F}(q_2), q_1 - q_2 \rangle &= \langle \mathcal{F}'(\theta)(q_1 - q_2), q_1 - q_2 \rangle \\ &= [\mathcal{F}'(\theta)(q_1 - q_2)]^\top (q_1 - q_2) \\ &= (q_1 - q_2)^\top \mathcal{F}'(\theta)(q_1 - q_2). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Für die Jacobimatrix $\mathcal{F}'(\theta)$ des Operators gilt nach (3.38) und (3.39), dass sie aus nicht negativen Einträgen besteht, weil Φ_E ausschließlich nicht negative Einträge hat. Also gilt nach (3.41):

$$\langle \mathcal{F}(q_1) - \mathcal{F}(q_2), q_1 - q_2 \rangle \geq 0, \quad (3.42)$$

woraus die Monotonie des Operators \mathcal{F} folgt. \square

Die Existenz von Lösungen für die Operatorgleichung $\mathcal{F}(q_N) = \psi$ mit der Definition des Operators in (3.28) zeigen wir in Anlehnung an die Ausführung in [3] mit Hilfe von Brouwers Fixpunktsatz. Der Satz besagt, dass jede stetige Abbildung von einer nichtleeren, kompakten und konvexen Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums in sich selbst einen Fixpunkt hat. Eine Folgerung aus dem Fixpunktsatz, die wir hier nicht beweisen, ist Satz 3.10.

Satz 3.10

$\mathcal{F} : \mathbb{R}^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}^{|N|}$ sei stetig. Es existiert eine Lösung zu $\mathcal{F}(q_N) = 0$ wenn gilt:
Es existiert ein $R > 0$ mit

$$\langle \mathcal{F}(q_N), q_N \rangle \geq 0 \quad (3.43)$$

für alle q_N mit $\|q_N\| = R$.

Mit Satz 3.11 und der in Satz 3.8 bewiesenen Stetigkeit und Koerzitivität des Operators \mathcal{F} ist die Existenz von Lösungen für die Operatorgleichung $\mathcal{F}(q_N) = \psi$ gezeigt.

Satz 3.11

$\mathcal{F} : \mathbb{R}^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}^{|N|}$ sei stetig und koerziv. Dann gilt:
Für jedes $\psi \in \mathbb{R}^{|N|}$ existiert eine Lösung für:

$$\mathcal{F}(q_N) = \psi \quad (3.44)$$

Beweis Sei $\psi = 0$. Wegen der Koerzitivität von \mathcal{F} existiert für jedes $L > 0$ ein $R > 0$ mit $\langle \mathcal{F}(q_N), q_N \rangle \geq L\|q_N\|$ sofern $\|q_N\| \geq R$. Demnach erfüllt \mathcal{F} die Bedingung (3.43). Für $\psi = 0_N$ ist die Behauptung bewiesen. Für beliebiges $\psi \in \mathbb{R}^{|N|}$ definieren wir die Abbildung

$$\mathcal{F}_\psi(q_N) := \mathcal{F}(q_N) - \psi. \quad (3.45)$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_\psi(q_N), q_N \rangle &= \langle \mathcal{F}(q_N), q_N \rangle - \langle \psi, q_N \rangle \\ &\geq \langle \mathcal{F}(q_N), q_N \rangle - \|\psi\| \|q_N\| \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\langle \mathcal{F}_\psi(q_N), q_N \rangle}{\|q_N\|} &\geq \frac{\langle \mathcal{F}(q_N), q_N \rangle}{\|q_N\|} - \|\psi\|. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Aus (3.46) folgt, dass $\mathcal{F}_\psi(q_N)$ koerziv ist. Zusammen mit Satz 3.10 ist der Beweis vollständig. \square

Die Hauptaussage von Satz 3.11 ist, dass für jede feste rechte Seite des Gleichungssystems (3.24) eine Lösung \hat{q}_N existiert. Wir zeigen nun, dass diese Lösung eindeutig ist. Dazu nutzen

wir die Gleichungssysteme (2.6) und (2.5) ergänzt um die Druckdifferenzen d , aus denen wir die Systeme (2.14) und (2.16) in Abschnitt 2.1 hergeleitet haben. Für den Beweis der Eindeutigkeit nutzen wir die erst genannten Systeme, woraus die Eindeutigkeit einer Lösung für die zuletzt genannten Systeme folgt. Der Beweis ist in Anlehnung an den Eindeutigkeitsbeweis in [53] entstanden. Wegen der Sätze 3.8 und 3.11 ist die Existenz von Lösungen für das folgende System bekannt:

$$\begin{aligned} Aq &= b \\ -d - \tilde{A}^\top \tilde{p}^2 &= \phi|q|q. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Wir nutzen die Matrix $(A_B^{-1}A_N)^\top$, um die Fundamentalkreis­matrix F zu beschreiben:

$$F = ((A_B^{-1}A_N)^\top, -\mathbb{I}_N). \quad (3.48)$$

Jede Zeile dieser Matrix korrespondiert zu einem Fundamentalkreis, welcher durch eine Nichtbaumkante definiert ist. Jede Spalte der Fundamentalkreis­matrix korrespondiert zu einer Kante des Graph. Die Einträge der Matrix sind wie folgt definiert:

$$F_{ie} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls Kante } e \text{ nicht im Fundamentalkreis zur Nichtbaumkante } i \text{ ist.} \\ -1 & , \text{ falls } e \text{ und } i \text{ zur gleichen Nichtbaumkante gehören.} \\ -1 & , \text{ falls Kante } e \text{ im Fundamentalkreis zur Nichtbaumkante } i \text{ ist} \\ & \text{und im Kreis gleich gerichtet ist wie } i. \\ 1 & , \text{ falls Kante } e \text{ im Fundamentalkreis zur Nichtbaumkante } i \text{ ist} \\ & \text{und im Kreis entgegengesetzt gerichtet ist zu } i. \end{cases} \quad (3.49)$$

Folgender Satz wird in [13] bewiesen und in [53] für den Beweis der Eindeutigkeit des auf passive Netze reduzierten Systems (3.47) genutzt.

Satz 3.12

Gegeben sei eine Fundamentalkreis­matrix F eines Graph \tilde{G}^+ sowie die zugehörige Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix \tilde{A} , dann gilt bei gleicher Reihenfolge der Kanten von \tilde{G}^+ in den Spalten der Matrizen F und \tilde{A} :

$$F\tilde{A}^\top = 0.$$

Beweis Die Einträge der Matrix F sind in (3.49) definiert. Bei der Multiplikation von F mit \tilde{A}^\top trifft eine Zeile der Fundamentalkreis­matrix, also ein Fundamentalkreis, auf eine Spalte der transponierten Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix, also auf einen Knoten. Entweder der Knoten liegt auf dem Fundamentalkreis oder nicht. Wir untersuchen beide möglichen Fälle bei festgehaltener Zeile i der Fundamentalkreis­matrix:

1. Angenommen Knoten j ist nicht im Fundamentalkreis.

Es kann nicht sein, dass Einträge $F_{il} \neq 0$ und $\tilde{A}_{lj}^\top \neq 0$ existieren. Dies würde nämlich bedeuten, dass Knoten j Fuß oder Kopf einer Kante l ist, welche im Fundamentalkreis liegt. Gegenteiliges haben wir aber angenommen.

$$\Rightarrow [F\tilde{A}^\top]_{ij} = 0.$$

2. Angenommen Knoten j ist im Fundamentalkreis.

Liegt Knoten j auf dem Fundamentalkreis, so existieren genau 2 Kanten im Fundamentalkreis, welche inzident zu ihm sind. O.B.d.A. seien dies die Kanten e und d . Nun ist die Richtung der Kanten im Kreis und ihre Lage zum Knoten j zu untersuchen:

- a) Knoten j ist Fuß von Kante e und von Kante d . Dies impliziert $\tilde{A}_{ej}^\top = \tilde{A}_{dj}^\top = -1$ sowie unterschiedliche Richtungen der Kanten e und d im Fundamentalkreis. Also gilt entweder $F_e = -1 \wedge F_d = 1$ oder $F_e = 1 \wedge F_d = -1$.
 $\Rightarrow [F\tilde{A}^\top]_{ij} = 0$.
- b) Knoten j ist Kopf von Kante e und von Kante d . Dies impliziert $\tilde{A}_{ej}^\top = \tilde{A}_{dj}^\top = 1$ sowie unterschiedliche Richtungen der Kanten e und d im Fundamentalkreis. Also gilt entweder $F_e = -1 \wedge F_d = 1$ oder $F_e = 1 \wedge F_d = -1$.
 $\Rightarrow [F\tilde{A}^\top]_{ij} = 0$.
- c) Knoten j ist Kopf von Kante e und Fuß von Kante d . Dies impliziert $\tilde{A}_{ej}^\top = 1 \wedge \tilde{A}_{dj}^\top = -1$ sowie gleiche Richtungen der Kanten e und d im Fundamentalkreis. Also gilt entweder $F_e = F_d = 1$ oder $F_e = F_d = -1$.
 $\Rightarrow [F\tilde{A}^\top]_{ij} = 0$.
- d) Knoten j ist Fuß von Kante e und Kopf von Kante d . Dies impliziert $\tilde{A}_{ej}^\top = -1 \wedge \tilde{A}_{dj}^\top = 1$ sowie gleiche Richtungen der Kanten e und d im Fundamentalkreis. Also gilt entweder $F_e = F_d = 1$ oder $F_e = F_d = -1$.
 $\Rightarrow [F\tilde{A}^\top]_{ij} = 0$.

Obige Überlegungen gelten für jeden Knoten $j \in \tilde{V}$ und jeden Fundamentalkreis $i \in N$. Also gilt $F\tilde{A}^\top = 0$. \square

Wir multiplizieren den zweiten Teil des Systems (3.47) mit der Fundamentalkreis­matrix F und erhalten:

$$\begin{aligned} Aq &= b \\ -Fd - F\tilde{A}\tilde{p}^2 &= F\phi|q|q. \end{aligned}$$

Das obige System ist wegen Satz 3.12 äquivalent zu:

$$\begin{aligned} Aq &= b \\ -Fd &= F\phi|q|q. \end{aligned}$$

Folgender Satz liefert die Eindeutigkeit von Lösungen obigen Systems und damit die Eindeutigkeit der Flüsse auf Kanten im Gasnetz.

Satz 3.13

Existiert für das System

$$\begin{aligned} Aq &= b \\ -Fd &= F\phi|q|q \end{aligned} \quad (3.50)$$

eine Lösung, so ist diese eindeutig.

Beweis Die Existenz einer Lösung obigen Systems gilt nach Satz 3.11 und Satz 3.8.

Annahme: Es gibt zwei Lösungen $q^{(1)} \neq q^{(2)}$ des Systems (3.50). Dann gilt:

$$\begin{aligned} Aq^{(1)} = Aq^{(2)} = b \quad \text{und} \quad F\phi|q^{(1)}|q^{(1)} = F\phi|q^{(2)}|q^{(2)} = -Fd \\ \Leftrightarrow \\ A(q^{(1)} - q^{(2)}) = 0 \quad \text{und} \quad F(\phi|q^{(1)}|q^{(1)} - \phi|q^{(2)}|q^{(2)}) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ q^{(1)} - q^{(2)} \in \ker A \quad \text{und} \quad \phi|q^{(1)}|q^{(1)} - \phi|q^{(2)}|q^{(2)} \in \ker F. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nun wollen wir zeigen, dass der Kern von F und der Kern von A orthogonal zueinander sind. Nach Satz 3.12 gilt $F\tilde{A}^\top = F(a_0^\top, A^\top) = (Fa_0^\top, FA^\top) = 0$, wobei a_0 die zum Wurzelknoten gehörende Zeile der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix \tilde{A} sei. Also gilt $FA^\top = 0$ auch für die um die Zeile, die zum Wurzelknoten gehört, reduzierte Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix A . Die Fundamentalkreis­matrix F hat vollen Zeilenrang $|N|$, was in [13] gezeigt wird. Die reduzierte Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix A hat den vollen Zeilenrang $|B|$. Aus $FA^\top = 0$ folgt für die Skalarprodukte aus den Zeilen der Matrizen F und A :

$$\langle f_k, a_j \rangle = 0, \text{ für alle } k = 1, \dots, |N|, j = 1, \dots, |B|, \quad (3.52)$$

wobei f_k die k -te Zeile der Matrix F sei und a_j die j -te Zeile der Matrix A . Insbesondere folgt aus (3.52):

$$\langle f_k, a_j \rangle = 0, \text{ für festes } k \text{ und alle } j = 1, \dots, |B|, \quad (3.53)$$

und daraus

$$f_k \in (\text{im } A^\top)^\perp, \text{ für alle } k = 1, \dots, |N|.$$

Dies gilt, weil die Spaltenvektoren $(a_1^\top, \dots, a_{|B|}^\top)$ den Bildraum von A^\top aufspannen und f_k wegen (3.53) senkrecht zu jedem dieser aufspannenden Vektoren ist. Es folgt weiter für alle

$k = 1, \dots, |N|$:

$$\begin{aligned}
\langle f_k, A^\top x \rangle &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{|V|} \\
&\Leftrightarrow \\
\langle Af_k, x \rangle &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{|V|} \\
&\Leftrightarrow \\
Af_k &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
f_k &\in \ker A.
\end{aligned}$$

Da die Matrix F vollen Rang hat und jede ihrer Zeilen im Kern von A enthalten ist, bilden ihre Zeilenvektoren $f_1, \dots, f_{|N|}$ eine Basis von $\ker A$. Es gilt weiterhin:

$$\langle f_k, a_j \rangle = 0, \text{ für festes } j \text{ und alle } k = 1, \dots, |N|.$$

Daraus folgt mit analoger Begründung wie für f_k :

$$a_j \in (\operatorname{im} F^\top)^\perp = \ker F, \text{ für alle } j = 1, \dots, |B|,$$

und weiter, dass $a_1, \dots, a_{|B|}$ eine Basis von $\ker F$ bilden. Die Zeilen von F bilden also eine Basis von $\ker A$ und die Zeilen von A bilden eine Basis von $\ker F$. Zusammen mit (3.52) folgt daraus, dass die Kerne beider Matrizen orthogonal zueinander sind.

Nun nutzen wir die Orthogonalität der Kerne, um aus (3.51) zu folgern:

$$\begin{aligned}
\langle \phi | q^{(1)} | q^{(1)} - \phi | q^{(2)} | q^{(2)}, q^{(1)} - q^{(2)} \rangle &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\sum_{e=1}^{|E|} (q_e^{(1)} - q_e^{(2)}) (\phi_e | q_e^{(1)} | q_e^{(1)} - \phi_e | q_e^{(2)} | q_e^{(2)}) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Jeder Term der Summe (3.54) ist nicht negativ, weil aus $q_e^{(1)} \geq q_e^{(2)}$ auch $\phi_e | q_e^{(1)} | q_e^{(1)} \geq \phi_e | q_e^{(2)} | q_e^{(2)}$ folgt und somit $(\phi_e | q_e^{(1)} | q_e^{(1)} - \phi_e | q_e^{(2)} | q_e^{(2)}) (q_e^{(1)} - q_e^{(2)}) \geq 0$. Die Gleichung in (3.54) kann demnach nur erfüllt werden, wenn jeder Term verschwindet. Dies wiederum gilt nur für $q_e^{(1)} = q_e^{(2)} \quad \forall e \in E$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme $q^{(1)} \neq q^{(2)}$ ist. \square

Für den Existenzbeweis und den Eindeutigkeitsbeweis haben wir unterschiedliche Darstellungen des Gasflussproblems genutzt. Im Folgenden soll die Darstellung (3.50) aus dem Eindeutigkeitsbeweis in den Operator \mathcal{F} aus (3.24) überführt werden, um so die Äquivalenz der Darstellungen zu verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
Aq &= b \\
-Fd &= F\phi|q|q \\
&\stackrel{\text{siehe (3.48)}}{\Leftrightarrow} \\
Aq &= b \\
-((A_B^{-1}A_N)^\top, -\mathbb{I}_N)d &= ((A_B^{-1}A_N)^\top, -\mathbb{I}_N)\phi|q|q \\
&\stackrel{N \cup B = E}{\Leftrightarrow} \\
Aq &= b \\
-(A_B^{-1}A_N)^\top d_B + d_N &= (A_B^{-1}A_N)^\top \phi_B|q_B|q_B - \phi_N|q_N|q_N \\
&\stackrel{\text{siehe (2.11)}}{\Leftrightarrow} \\
\phi_N|q_N|q_N - (A_B^{-1}A_N)^\top d_B \\
+ d_N &= (A_B^{-1}A_N)^\top \phi_B|A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N|(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nq_N) \\
&\stackrel{\text{siehe (3.24)}}{\Leftrightarrow} \\
\mathcal{F}(q_N) &= (A_B^{-1}A_N)^\top d_B - d_N.
\end{aligned}$$

In Satz 3.8 zusammen mit Satz 3.11 wird die Existenz für Lösungen des Systems (2.16) gezeigt unter der Annahme, dass die Druckdifferenzen über aktive Elemente fixiert sind. Dazu wird die Koerzivität des Operators $\mathcal{F}(q_N)$ bewiesen. Im folgenden Abschnitt 3.2.3 führen wir einen Koerzivitätsbeweis für einen Operator $\mathcal{H}(\hat{q}, q)$ durch, der Operator $\mathcal{F}(q_N)$ als Spezialfall einschließt. Zusammen mit der Vorgabe eines festen Drucks am Wurzelknoten liefert das System (2.14) die Drücke an allen weiteren Knoten. In Satz 3.13 wird gezeigt, dass der Lösungsvektor q_N von (2.16) eindeutig ist und damit auch eindeutig ein Druckvektor p bestimmt werden kann.

3.2.3. Ein Operator im Gasflussmodell für Stützreglergebiete

In Abschnitt 3.1 wird die Dekomposition von Stützreglergebieten beschrieben. In Abschnitt 3.1.1 werden Beispiele für spezielle Stützreglergebiete genannt. In diesem Abschnitt betrachten wir nun den Fall eines Stützreglergebiets $\tilde{G}_{|\mathcal{N}|}$ mit einer endlichen Anzahl $|\mathcal{N}| \geq 2$ von aufspeisenden Stützreglern und mit $k \geq 0$ Kreisen. Wir gehen davon aus, dass alle Stützregler geöffnet sind und daher einen fixierten Ausgangsdruck \hat{p} besitzen. Wir definieren einen Operator, welcher aus den Druckabfallsgleichungen für die Ausgangsdrücke der Stützregler und aus den Kreisgleichungen besteht. Wir definieren $s := |\mathcal{N}| - 1$. Der Variablenvektor besteht aus den Flüssen \hat{q}_i , $i = 1, \dots, s$, welche über die Ausgangsknoten der Stützregler e_1 bis e_s fließen und aus den Flüssen über Kreiskanten q_e , $e = 1, \dots, k$. Wir werden zeigen, dass dieser Operator koerziv und stetig ist. Dann folgt aus Satz 3.11, dass für jede Fixierung der Ausgangsdrücke und Druckdifferenzen d_B und d_N eine gültige Belegung der Variablen $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_s, q_1, \dots, q_k$ existiert. Wir definieren den Ausgangsknoten von Stützregler 0 als Wurzelknoten mit dem Druck $p_r = \hat{p}_0$

und erhalten so bei $|\mathcal{N}|$ Stützreglern und k Kreisen ein System mit $s+k$ Gleichungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{p}_i^2 - p_r^2 + [A_B^{-\top} d_B]_i \\ A_N^\top A_B^{-\top} d_B - d_N \end{pmatrix}}_{=:\psi} = \underbrace{\begin{pmatrix} [-A_B^{-\top} \phi_B | A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q] (A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q) \Big|_i, i=1, \dots, s \\ \phi_N | q | q - A_N^\top A_B^{-\top} [\phi_B | A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q] (A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q) \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{H}(\hat{q}, q)} \quad (3.55)$$

Wir definieren die Einträge aus A_B^{-1} als $\alpha_{lj} \in \{-1, 0, 1\}$, die Einträge aus $A_B^{-\top}$ als $\gamma_{jl} \in \{-1, 0, 1\}$, die Einträge aus $A_N^\top A_B^{-\top}$ als $\beta_{nl} \in \{-1, 0, 1\}$ und die Einträge aus $A_B^{-1} A_N$ als $\sigma_{ln} \in \{-1, 0, 1\}$. Es gilt $\alpha_{lj} = \gamma_{jl}$ sowie $\beta_{nl} = \sigma_{ln}$. Die Menge der Knoten ohne den Wurzelknoten sei $V_{|\mathcal{N}|}$ und die Menge der Kanten sei $E_{|\mathcal{N}|}$. Aus Gründen der übersichtlicheren Darstellungen bezeichnen wir bis zum Ende diesen Abschnitts $V := V_{|\mathcal{N}|}$. Mit dieser Notation gilt für den Operator $\mathcal{H}(\hat{q}, q)$ aus der Operatorgleichung (3.55):

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(\hat{q}, q) \\ &= \begin{pmatrix} [-A_B^{-\top} \phi_B | A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q] (A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q) \Big|_i, i=1, \dots, s \\ \phi_N | q | q - A_N^\top A_B^{-\top} \phi_B | A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q] (A_B^{-1} b(\hat{q}) - A_B^{-1} A_N q) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \phi_{B_1} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{1j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{1n} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{1j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{1n} q_n \right) \\ \vdots \\ \phi_{B_{|B|}} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{|B|j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{|B|n} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{|B|j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{|B|n} q_n \right) \end{array} \right]_i, i=1, \dots, s \\ \phi_N | q | q - A_N^\top A_B^{-\top} \left[\begin{array}{c} \phi_{B_1} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{1j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{1n} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{1j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{1n} q_n \right) \\ \vdots \\ \phi_{B_{|B|}} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{|B|j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{|B|n} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{|B|j} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{|B|n} q_n \right) \end{array} \right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sum_{l=1}^{|B|} \gamma_{1l} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \\ \vdots \\ -\sum_{l=1}^{|B|} \gamma_{sl} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \\ \phi_{N_1} | q_1 | q_1 - \sum_{l=1}^{|B|} \beta_{1l} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \\ \vdots \\ \phi_{N_k} | q_k | q_k - \sum_{l=1}^{|B|} \beta_{kl} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \end{pmatrix} \quad (3.56) \end{aligned}$$

Für den Vektor $b(\hat{q})$ gilt:

$$b(\hat{q}) = \begin{pmatrix} -\hat{q}_1 \\ \vdots \\ -\hat{q}_s \\ b_{s+1} \\ \vdots \\ b_{|V|} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

wobei $b_j \ \forall j = s+1, \dots, |V|$ konstant ist.

Satz 3.14

Der Operator $\mathcal{H}(\hat{q}, q) : \mathbb{R}^{s+k} \rightarrow \mathbb{R}^{s+k}$, welcher in (3.55) definiert wird, ist stetig und koerziv.

Beweis

1. Die *Stetigkeit* des Operators \mathcal{H} lässt sich ableiten aus der Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|x$. In der Darstellung (3.56) des Operators \mathcal{H} wird deutlich, dass er sich aus linearen Verknüpfungen der stetigen Funktion f darstellen lässt und somit selber stetig ist.

2. *Koerzivität*: Wir betrachten das Skalarprodukt $\left\langle \mathcal{H}(\hat{q}, q), \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle$ mit der Darstellung des Operators $\mathcal{H}(\hat{q}, q)$ aus (3.56):

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{H}(\hat{q}, q), \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{m=1}^s \left[-\sum_{l=1}^{|B|} \gamma_{ml} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \right] \hat{q}_m \\ & \quad + \sum_{i=1}^k \left[\phi_{N_i} |q_i| q_i - \sum_{l=1}^{|B|} \beta_{il} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \right] q_i \\ &= \sum_{m=1}^s \left[-\sum_{l=1}^{|B|} \gamma_{ml} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \right] \hat{q}_m \\ & \quad + \sum_{i=1}^k \left[\phi_{N_i} |q_i| q_i - \sum_{l=1}^{|B|} \beta_{il} \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \right] q_i \\ &= \sum_{l=1}^{|B|} \left[\phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \left(\sum_{m=1}^s -\gamma_{ml} \hat{q}_m \right) \right] \\ & \quad + \sum_{i=1}^k \phi_{N_i} |q_i| q_i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^{|B|} \left[\phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \left(\sum_{i=1}^k -\beta_{il} q_i \right) \right] \\
& = \sum_{i=1}^k \phi_{N_i} |q_i| q_i^2 \\
& + \sum_{l=1}^{|B|} \left[\phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) \right. \\
& \quad \cdot \left. \left(\sum_{m=1}^s -\gamma_{ml} \hat{q}_m + \sum_{i=1}^k -\beta_{il} q_i \right) \right] \\
& = \sum_{i=1}^k \phi_{N_i} |q_i| q_i^2 \\
& + \sum_{l=1}^{|B|} \left\{ \phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \right. \\
& \quad \cdot \left. \left[\left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) c_l \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Die Konstanten c_l bestimmen für alle Kanten $l \in B$ den konstanten Anteil des Flusses über die Kante:

$$c_l = \sum_{j=s+1}^{|V|} \alpha_{lj} b_j(\hat{q}) \quad \forall l \in B$$

Um Definition 3.6 anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass gilt:

$$\frac{\left\langle \mathcal{H}(\hat{q}, q), \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\|} \rightarrow \infty \quad \text{wenn} \quad \left\| \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \infty. \tag{3.59}$$

Aus (3.58) folgt:

$$\frac{\left\langle \mathcal{H}(\hat{q}, q), \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\|} \quad (3.60)$$

$$= \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\|} \sum_{i=1}^k \phi_{N_i} |q_i| q_i^2$$

$$+ \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\|} \sum_{l=1}^{|B|} \left[\phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \underbrace{\left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right)^2}_{a)} \right] \quad (3.61)$$

$$+ \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\|} \sum_{l=1}^{|B|} \left[\phi_{B_l} \left| \sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j + c_l - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right| \underbrace{\left(\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j - \sum_{n=1}^k \sigma_{ln} q_n \right) c_l}_{b)} \right] \quad (3.62)$$

Der quadratische Faktor a) in dem Summand (3.61) dominiert den linearen Faktor b) in (3.62), sodass der Quotient in (3.60) gegen Unendlich strebt, sobald der Fluss über eine Kreiskante für $\left\| \begin{pmatrix} \hat{q} \\ q \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist oder sobald es eine Kante $l \in B$ gibt, für die $\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j$ unbeschränkt ist.

Nehmen wir also an, dass alle Flüsse über die Kreiskanten beschränkt sind. Andernfalls gilt (3.59) und wir haben die Koerzitivität des Operators $\mathcal{H}(\hat{q}, q)$ gezeigt. Betrachten wir nun einen Ast des Baumes, indem mindestens einer der Stützreglerausgangsknoten mit Index $h \in \{1, \dots, s\}$ liegt und fixieren die Flüsse auf den Kreiskanten als konstant Null. Sind mehrere Stützreglerausgangsknoten auf dem Ast, so sei h der Index zu dem Knoten, welcher nicht auf dem Weg von der Wurzel zu einem anderen Stützreglerausgangsknoten vorkommt. Für den zur Kante l , welche h als Kopfknoten hat, gehörenden Summanden gilt dann $\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j = -\alpha_{lh} \hat{q}_h$. Falls die Komponente \hat{q}_h unbeschränkt ist, haben wir eine Kante gefunden für die gilt, dass $\sum_{j=1}^s -\alpha_{lj} \hat{q}_j$ für $\|\hat{q}\| \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist. Falls die Komponente \hat{q}_h für $\|\hat{q}\| \rightarrow \infty$ beschränkt ist, fixieren wir sie auf Null und betrachten den nächsten Stützreglerausgangsknoten mit Index $h-1$ auf dem Ast in Richtung des Wurzelknotens mit zugehöriger Variable \hat{q}_{h-1} . Wir betrachten den Fluss auf der Kante $l-1$, welche inzident zu dem Knoten mit Index $h-1$ ist und auf dem Weg von der Wurzel zum Knoten mit Index $h-1$ liegt. Für den zugehörigen Summanden gilt $\sum_{j=1}^s -\alpha_{(l-1)j} \hat{q}_j = -\alpha_{(l-1)(h-1)} \hat{q}_{h-1}$. Falls \hat{q}_{h-1} unbeschränkt ist, haben wir eine Kante

mit unbeschränktem Fluss gefunden. Falls die Variable \hat{q}_{h-1} beschränkt ist, wiederholen wir obige Schritte. Wir finden also immer eine Kante \tilde{l} , welche inzident zu einem Knoten mit einer unbeschränkten Variablen $\hat{q}_{\tilde{h}}$ ist und welche nicht auf dem Weg von der Wurzel zu einem weiteren Knoten mit unbeschränkter Variable liegt. Sie liegt aber auf dem Weg von der Wurzel zum Knoten mit der unbeschränkten Variable $\hat{q}_{\tilde{h}}$. Andernfalls würde $\|\hat{q}\|$ beschränkt sein, was der Voraussetzung aus Definition 3.6 widerspricht. Also gilt (3.59) und die Koerzivität des Operators $\mathcal{H}(\hat{q}, q)$ ist gezeigt.

□

Aus Satz 3.14 folgt mittels Satz 3.11 für fixierte Drücke an den Ausgangsknoten der Stützregler und fixierte Druckdifferenzen d_B und d_N , dass eine gültige Belegung der Flussvariablen \hat{q} und q existiert. Den Operator $\mathcal{F}(q_N)$ können wir als Spezialfall des Operators $\mathcal{H}(\hat{q}, q)$ ansehen, wenn $|\mathcal{N}| < 2$ gilt. Wenn es keine oder nur einen Stützregler gibt, entfällt das erste Gleichungssystem in (3.55) und der Operator besteht aus dem System von Kreisgleichungen. Der in (3.57) definierte Ein- und Ausspeisevektor besitzt in diesem Fall nur konstante Werte. Der hier vorgestellte Koerzivitätsbeweis für den Operator $\mathcal{H}(\hat{q}, q)$ ist demnach auch für den Operator $\mathcal{F}(q_N)$ gültig und kann als Alternative zu dem Koerzivitätsbeweis zu Satz 3.8 gesehen werden.

4. Algorithmen

Im ersten Teil dieses Kapitels beschreiben wir zwei verschiedene Heuristiken zur Fixierung von Binärentscheidungen der schaltbaren Elemente. Erst nach dieser Fixierung kann das Modell aus Kapitel 2 angewandt werden. Im zweiten Teil wird dargestellt wie die einzelnen Komponenten zu einem Gesamtalgorithmus verbunden werden. Zu diesen Komponenten zählt das nichtlineare, nichtkonvexe Modell, welches wir nach der Fixierung der Binärentscheidungen nutzen. Weitere Komponenten bilden die Dekomposition von Stützreglergebieten sowie die Heuristiken zur Fixierung von Binärentscheidungen.

4.1. Heuristiken zur Fixierung der Binärentscheidungen

Um das Problem, welches in Abschnitt 2.1 eingeführt und in Abschnitt 2.3 zusammengefasst wird, lösen zu können, benötigen wir vorher festgelegte Binärentscheidungen. Diese geben an, welche schaltbaren Elemente geschlossen sind. Diese geschlossenen Elemente sind nicht in dem gerichteten Graph G aus Abschnitt 2.1 enthalten. Es ist zusätzlich möglich, dass ein automatisierter Regler durch das Modell mit Variablenreduktion geschlossen wird, welcher durch die Heuristik nicht als geschlossen fixiert wurde. Dies wird durch die Bedingung (2.25) ermöglicht. Wir nutzen zwei verschiedene Heuristiken. Die Heuristik, welche in Abschnitt 4.1.1 beschrieben wird, beruht auf Expertenwissen bzw. auf Erfahrung, welche bei der Übersetzung der Lösung des Netzwerkflussproblems in geeignete Fixierungen von Binärentscheidungen eingeht. Die Heuristik, welche in Abschnitt 4.1.2 vorgestellt wird, beruht einerseits ebenfalls auf Expertenwissen und andererseits auf bereits erfolgreich gerechneten Instanzen des gleichen Netzes. Es werden mehrere Kombinationen von fixierten Elementen vorgegeben, welche iterativ getestet werden.

Bei der Fixierung der Binärentscheidungen müssen vordefinierte Gruppen von Verdichterstationen, automatisierten Reglern und Schiebern besonders beachtet werden. Es gibt Gruppen schaltbarer Elemente, bei denen nicht alle möglichen Kombinationen ihrer Binärentscheidungen erlaubt sind. Diese Bedingungen sind weniger in der Gasphysik begründet als in den Möglichkeiten zur Netzsteuerung des Transportunternehmens. Sie werden nicht in das nichtlineare nichtkonvexe Modell aus Abschnitt 2.1 integriert, sondern bei den Heuristiken zur Fixierung der Binärentscheidungen beachtet.

4.1.1. Eine Heuristik auf Grundlage eines Netzwerkflussproblems

Bei dieser Heuristik wollen wir die grobe Flusssituation im Netz analysieren und schaltbare Elemente möglichst geeignet als geschlossen oder geöffnet fixieren. Dabei werden die vordefinierten Gruppen von Binärentscheidungen berücksichtigt und genutzt.

Vereinfachung des Netzes

Im ersten Schritt vereinfachen wir das Originalnetz $\tilde{G}^+ = (\tilde{V}, E^+)$, welches alle Knoten und Kanten enthält nach folgenden Regeln zum vereinfachten Netz $G^{\text{NF}} = (V^{\text{NF}}, E^{\text{NF}})$:

1. Es gibt Gebiete im Netz, die wir zu Stationen zusammenfassen. Dazu müssen die Stationen a priori definiert werden. Alle Knoten und Kanten innerhalb einer Station werden zu einem Knoten aggregiert. In Abbildung 4.1(a) gehören alle blauen Elemente zur Station. Die roten Knoten sind die Randknoten der Station, über welche die Station erreicht und verlassen werden kann. Stationen schrumpfen im Netzwerk für die Heuristik zu einem Stationsknoten, Randknoten und Verbindungskanten zwischen Stations- und Randknoten zusammen. Diese Verbindungskanten fassen wir in der Menge E_{Station} zusammen. Die geschrumpfte Station zu Abbildung 4.1(a) ist in Abbildung 4.1(b) dargestellt. Hier wird angenommen, dass die Station über jeden Randknoten sowohl erreicht als auch verlassen werden kann, da jeweils Kanten in beiden Richtungen hinzugefügt sind.
2. In Abbildung 4.2(a) ist ein Originalnetz dargestellt. Für das Erstellen des geschrumpften Netzes werden alle Kanten und Knoten, die nicht durch eine Station oder ein schaltbares Element voneinander getrennt sind sowie nicht innerhalb einer Station liegen, zu einem Subnetz zusammengefasst. Wir nehmen für dieses Beispiel an, dass die Verdichterstationen und der automatisierte Regler nicht rückwärts durchflossen werden dürfen. Daher werden im geschrumpften Netz in Abbildung 4.2(b) keine Rückwärtskanten für die Verdichterstationen und den automatisierten Regler hinzugefügt. Die aggregierten Subnetze werden in beiden Richtungen mit den Knoten verbunden, mit denen sie im Originalnetz verbunden sind. Daher sind in Abbildung 4.2(b) sowohl Vorwärts- als auch Rückwärtskanten eingefügt, welche wir in der Menge E_{Sub} zusammenfassen.
3. Schaltbare Elemente, welche nicht zu einer Station gehören, bleiben im reduzierten Netz erhalten. Falls diese im Originalnetz in beiden Richtungen durchflossen werden dürfen, wird zusätzlich eine Rückwärtskante im geschrumpften Netz eingefügt.
4. Die ein- und ausgespeisten Flüsse werden in dem Subnetz zusammengefasst, in dem sich die Ein- bzw. Ausspeiseknoten befinden. Im Beispiel aus Abbildung 4.2(a) werden die Ausspeisungen von jeweils $10 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ der Knoten rechts vom automatisierten Regler in dem Subnetz zusammengefasst, in dem sie sich befinden. Dies ist in Abbildung 4.2(b) dargestellt. Dieses Subnetz hat demnach eine Ausspeisung von $30 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$.
5. Alle Kanten der Menge E^{NF} dürfen nur vorwärts durchflossen werden.

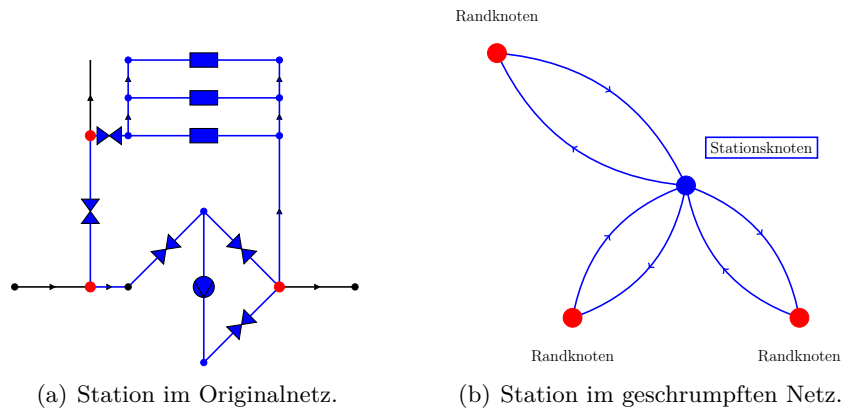


Abbildung 4.1.: Reduzierung einer Station.

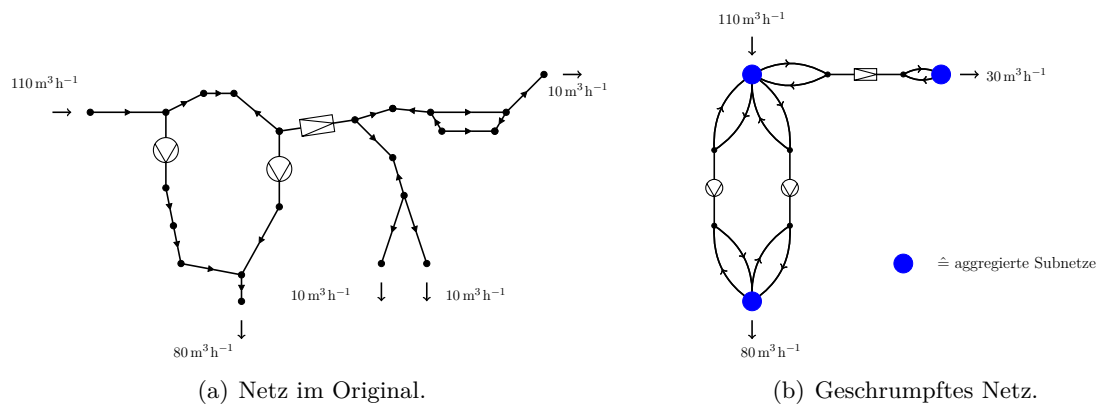


Abbildung 4.2.: Reduzierung eines Netzes für das Netzwerkflussproblem.

Das Modell zum Netzwerkflussproblem

Variablen:

Die Variablen sind Flussvariablen mit positivem Fluss für alle Kanten des geschrumpften Netz-
es. Diejenigen Kanten, welche im Originalnetz nicht vorhanden sind bekommen eine künstliche
Kapazitätsgrenze von $10^6 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$. Kanten, welche auch im Originalnetz existieren, übernehmen
ihre dort gültigen Flussgrenzen:

$$0 \leq q_e^{\text{NF}} \leq \overline{q}_e^{\text{NF}} = \begin{cases} \overline{q}_a, & \text{für } a \in E_{\text{VS}}^+ \cup E_{\text{Re}}^+ \cup E_{\text{S}}^+ \text{ und Kante } e \text{ ist eine Vorwärtskante} \\ & \text{und korrespondiert zu Kante } a \text{ aus dem Originalnetz.} \\ & \overline{q}_a \text{ ist der maximal erlaubte Fluss aus dem Originalnetz.} \\ -\underline{q}_a, & \text{für } a \in E_{\text{VS}}^+ \cup E_{\text{Re}}^+ \cup E_{\text{S}}^+ \text{ und Kante } e \text{ ist eine Rückwärtskante} \\ & \text{und korrespondiert zu Kante } a \text{ aus dem Originalnetz.} \\ & \underline{q}_a \text{ ist der minimal erlaubte Fluss aus dem Originalnetz.} \\ 10^6, & \text{für } e \in E_{\text{Station}} \cup E_{\text{Sub}}. \end{cases}$$

Zielfunktion:

Pro Kante wird für die Zielfunktion ein Produkt aus dem Fluss über die Kante und fiktiven
Kosten berechnet. In der Zielfunktion wird die Summe dieser Produkte minimiert. Im Folgen-
den wird erläutert wie die fiktiven Kosten für die einzelnen Kanten berechnet werden:

- Kanten von schaltbaren Elementen werden a priori gewählte, konstante Kosten zugeord-
net. Die Kosten für die Rückwärtskanten von Verdichterstationen und automatisierten
Reglern sind größer gewählt als die für die Vorwärtskante, da es sinnvoller ist diese Ele-
mente vorwärts zu durchlaufen. Andernfalls können sie nur im Bypass betrieben werden
und weder verdichten noch regeln.
- Künstliche Verbindungskanten, welche Stationen mit ihren Randknoten verbinden, be-
kommen in beiden Richtungen sehr kleine a priori gewählte Kostenkoeffizienten.
- Künstlichen Kanten, welche aggregierte Subnetze mit schaltbaren Elementen oder Rand-
knoten von Stationen verbinden, wird eine Summe aus Druckverlustkoeffizienten als fik-
tive Kosten zugeordnet. Die Summe besteht aus allen Druckverlustkoeffizienten ϕ (siehe
im Anhang Gleichung (A.15)) der Rohre, welche in dem Subnetz aggregiert werden. Um
diese a priori berechnen zu können wird für die Formel zur Bestimmung der Reynoldszahl
ein konstanter mittlerer Fluss angenommen (siehe im Anhang Abschnitt A.3). Durch die-
se Summe soll der Druckverlust, den das Gas erfährt, wenn es durch ein Subnetz strömt,
approximiert werden.

Nebenbedingung:

Flusserhaltungen an jedem Knoten bilden die Nebenbedingungen.

Zusammenfassung:

Für die konstanten Kosten sind die Werte angegeben, welche in den Rechnungen aus Abschnitt

5.3 genutzt wurden.

$$\min \left\{ \sum_{e=1}^{|E^{\text{NF}}|} c_e q_e^{\text{NF}}, \quad A^{\text{NF}} q^{\text{NF}} = b^{\text{NF}}, \quad 0 \leq q^{\text{NF}} \leq \bar{q}^{\text{NF}} \right\}. \quad (4.1)$$

- $A^{\text{NF}} \triangleq$ Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix des reduzierten Netzes.
- $b^{\text{NF}} \triangleq$ Aggregierte Ein- bzw. Ausspeisungen des reduzierten Netzes.
- $c_e \triangleq$ Kosten für die einzelnen Kanten.
- $c_e = \begin{cases} 10^{-4} & \text{falls Kante } e \text{ ein Schieber ist.} \\ 10^{-5}, & \text{falls Kante } e \text{ eine Vorwärtskante eines automatisierten Reglers ist.} \\ 10^2, & \text{falls Kante } e \text{ eine Rückwärtskante eines automatisierten Reglers ist.} \\ 10^{-11}, & \text{falls Kante } e \text{ eine Vorwärtskante einer Verdichterstation ist.} \\ 10^1, & \text{falls Kante } e \text{ eine Rückwärtskante einer Verdichterstation ist.} \\ 10^{-10}, & \text{falls } e \in E_{\text{Station}}. \\ \sum_{s=1}^{|f|} \phi_s, & \text{falls Kante } e \text{ eine Verbindungskante eines Subnetzes } \mathcal{S} \text{ ist.} \\ \phi_s & \text{ sind die Druckverlustkoeffizienten der Kanten } s \in f. \end{cases}$
- $f \triangleq$ Menge der im Subnetz \mathcal{S} aggregierten Kanten.

Zu lösen ist ein lineares Netzwerkflussproblem mit positivem Kantenfluss. Dieses lässt sich für die von uns betrachteten Netze in sehr kurzer Zeit mit verschiedenen auch auf nichtlineare Probleme spezialisierten Lösern wie CONOPT lösen.

Die Interpretation der Lösung des Netzwerkflussproblems

Die Lösung des Problems (4.1) besteht aus einem Vektor q^{NF} von Flussvariablen. Dieser wird zur Fixierung der Binärentscheidungen für das reduzierte nichtlineare Problem genutzt, welches in Abschnitt 2.3 zusammengefasst wird. Die Flüsse werden je nach Kantentyp im reduzierten Netz unterschiedlich interpretiert:

1. Verbindungskanten von und zu Subnetzen korrespondieren zu keinem schaltbaren Element des Originalnetzes und werden für die Binärentscheidungen nicht betrachtet.
2. Bei Vorwärts- und Rückwärtskanten von schaltbaren Elementen wird überprüft, ob in der Lösung des Netzwerkflussproblems ein genügend großer Normvolumenfluss über sie strömt. Dies ist der Fall, wenn gilt: $q_e^{\text{NF}} > \varepsilon_{\text{NF}}$, $e \in E_{\text{S}}^{\text{NF}} \cup E_{\text{Re}}^{\text{NF}} \cup E_{\text{VS}}^{\text{NF}}$. E_{S}^{NF} seien alle Schieber, $E_{\text{Re}}^{\text{NF}}$ alle automatisierten Regler und $E_{\text{VS}}^{\text{NF}}$ alle Verdichterstationen der Kantenmenge E^{NF} . Die Binärentscheidung dieser Kanten wird für den Aufbau des reduzierten NLP auf geöffnet fixiert. Schaltbare Elemente mit einem Fluss unterhalb der Toleranzgrenze ε_{NF} in der Lösung des Netzwerkflussproblems werden geschlossen. In Bild 4.3(a) ist eine Lösung des Netzwerkflussproblems dargestellt. Alle Kanten mit

einem Fluss unterhalb der Toleranzgrenze ε_{NF} wurden zur Veranschaulichung aus dem Netz entfernt. In Bild 4.3(b) sieht man die Interpretation der Lösung als Binärentscheidung für das Originalnetz. Eine rote Verdichterstationskante symbolisiert, dass ihre Binärentscheidung auf geschlossen fixiert wird und eine grüne Kante symbolisiert, dass die Binärentscheidung des zugehörigen Elements auf geöffnet gesetzt wird.

- Wir betrachten erneut Abbildung 4.1(a), in der ein Netzausschnitt mit einer Station dargestellt ist. Die roten Knoten sind die Randknoten der Station. In Abbildung 4.1(b) sieht man die Darstellung der Station innerhalb des geschrumpften Netzes. Nach dem Lösen des Netzwerkflussproblems, betrachten wir die Normvolumenströme über die Kanten, welche die Randknoten mit dem Stationsknoten verbinden. In den Abbildungen 4.4 und 4.5 ist jeweils eine Lösung des Netzwerkflussproblems dargestellt sowie ihre Interpretation für die Binärentscheidungen innerhalb der Station. Alle Verbindungskanten zwischen Randknoten und Stationsknoten mit einem Fluss unterhalb der Toleranzgrenze ε_{NF} sind in der Darstellung der Lösung des Netzwerkflussproblems gelöscht. Die Interpretation beruht auf den vordefinierten Gruppen von schaltbaren Elementen, bei denen nicht alle theoretisch möglichen Kombinationen ihrer Binärentscheidungen erlaubt sind. A priori werden Entscheidungsregeln definiert, welche jeder möglichen Lösung des Netzwerkflussproblems eine zulässige Kombination von Binärentscheidungen innerhalb der Station zuordnen. Rot gefärbte Elemente werden als geschlossen fixiert, und grün gefärbte Elemente werden geöffnet.

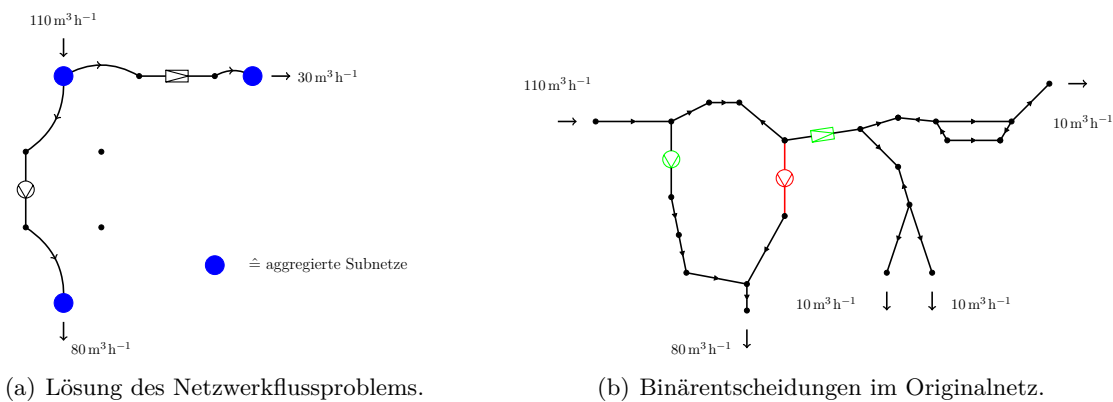
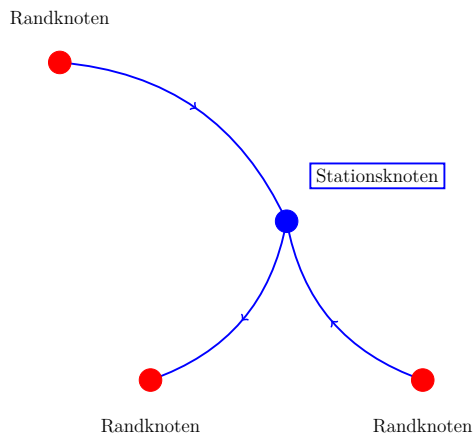
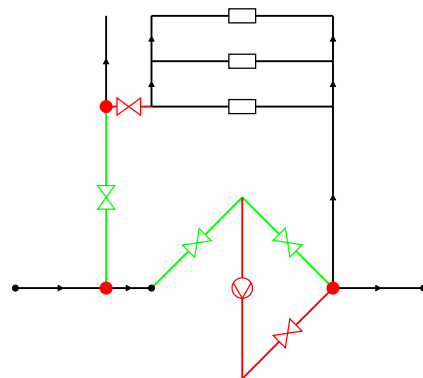


Abbildung 4.3.: Interpretation der Lösung des Netzwerkflussproblems.

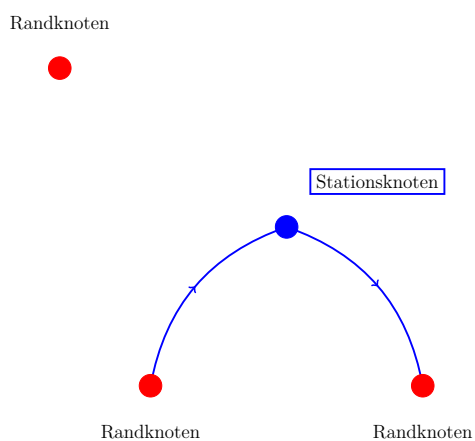


(a) Lösung des Netzwerkflussproblems.

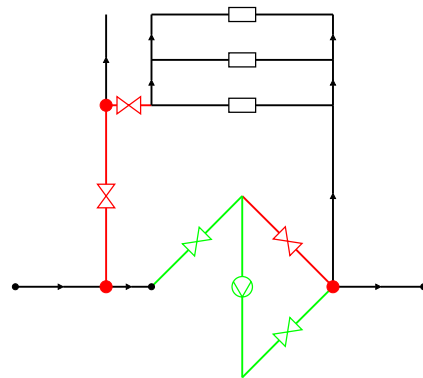


(b) Übersetzung der Lösung in Binärentscheidungen.

Abbildung 4.4.: Interpretation einer Netzwerkflussproblemlösung in einer Station I.



(a) Lösung des Netzwerkflussproblems.



(b) Übersetzung der Lösung in Binärentscheidungen.

Abbildung 4.5.: Interpretation der Lösung des Netzwerkflussproblems in einer Station II.

4.1.2. Heuristik mittels vorgegebener Konfigurationen

Bei Aufgabenstellungen in der Realität geht es oft darum, eine große Anzahl von Nominierungen auf dem gleichen zu Grunde liegenden Netz auf Zulässigkeit zu überprüfen. Des Weiteren können ähnliche Nominierungen¹ oft mit gleichen Schaltzuständen schaltbarer Elemente gelöst werden. Daher werden in dieser Heuristik diejenigen Konfigurationen von Binärentscheidungen genutzt, welche bei anderen Nominierungen zur Zulässigkeit geführt haben. Es werden solange vorgegebene Konfigurationen getestet bis entweder eine zulässige Lösung gefunden wurde oder alle Konfigurationen getestet wurden. Im letzten Fall können wir nur die Aussage treffen, dass die Nominierung mit keiner der getesteten Konfigurationen von Binärentscheidungen zulässig gelöst werden kann.

Dieses Verfahren spiegelt automatisiert die aktuelle Arbeitsweise von Netzplanern bei OGE wider. Wenn eine spezielle Nominierung auf Zulässigkeit überprüft werden soll, werden den schaltbaren Elementen im Simulationsprogramm SIMONE [61] von Hand ihre Schaltzustände zugewiesen. Zusätzlich müssen Drücke oder Volumenströme an den Verdichterstationen und Reglern festgelegt werden. Diese Werte werden von unserem reduzierten NLP berechnet. Mit Hilfe dieser Heuristik kann man daher das über lange Zeit erarbeitete Wissen von OGE-Mitarbeitern in unser Modell einfließen lassen.

¹Ähnliche Flusssituation: z. B. maximale Nutzung der Einspeisungen im Norden.

4.2. Zusammenspiel der Komponenten zu einem Gesamtalgorithmus

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Komponenten zu einem Gesamtalgorithmus zusammengefügt. In Kapitel 2 wird beschrieben, wie wir das Gasflussproblem mit Bestimmung der Drücke an Knoten und Flüsse an Kanten als nichtlineares Modell mit Variablenreduktion beschreiben und lösen. In Abschnitt 4.1 wird beschrieben, wie wir Binärentscheidungen fixieren. Je nach Kantentypen im vorliegenden Netz können wir den in Kapitel 3.1 beschriebenen Dekompositionsansatz anwenden. Der Gesamtalgorithmus ist daher ein iterativer Prozess, in welchem verschiedene Verfahren zusammenwirken. Im Gegensatz dazu steht das Modellieren des Gasflussproblems als gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem wie es in [24] beschrieben wird. Nichtlinearitäten werden zur Erstellung des gemischt-ganzzahligen Modells mit Hilfe von stückweise linearen Einhüllenden relaxiert. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, dass es bei hinreichend genauer Betrachtung von realen Gasnetzen zu Optimierungsproblemen mit sehr vielen Variablen und Nebenbedingungen führt, was sich durch lange Rechenzeiten bemerkbar macht. Ein Vorteil gegenüber dem von uns vorgestellten Verfahren ist die Möglichkeit, Unzulässigkeiten feststellen zu können. Das gemischt-ganzzahlige Problem wird als Relaxierung des nichtlinearen Problems aufgebaut. Dadurch bedeutet eine Unzulässigkeit im gemischt-ganzzahligen Problem immer auch, dass das nichtlineare Problem unzulässig ist. Unzulässigkeit kann unser Verfahren nur zeigen, wenn für die Netzwerkfluss-Heuristik keine Lösung gefunden wird, weil dort ein lineares Problem gelöst wird.

In Abbildung 4.6 wird der Gesamtalgorithmus zur Lösung einer gegebenen Nominierung beschrieben. Zuerst wird festgestellt, ob es Stützreglergebiete gibt, welche separat berechnet werden können. Dazu müssen die Voraussetzungen an die Gebiete eingehalten werden, welche in Kapitel 3.1 beschrieben werden. Gibt es keine Stützreglergebiete, so wird der Algorithmus wie in Abbildung 4.7 dargestellt fortgesetzt. Können Stützreglergebiete identifiziert werden, so wird für jedes dieser Gebiete der Normvolumenfluss über die aufspeisenden Stützregler bestimmt. Wird für eines der Gebiete keine Lösung gefunden, so bleibt die Nominierung auf dem gesamten Netz ohne Lösung. Können für alle Gebiete aufspeisende Flüsse bestimmt werden, so wird das Originalnetz modifiziert. Die Stützreglergebiete werden einschließlich der Stützregler aus dem Originalnetz entfernt. Die Anfangsknoten der Stützregler werden gegebenenfalls zu Senken mit dem berechneten Fluss über den Stützregler als Ausspeisung umgeformt. Anschließend erfolgt die Berechnung des verkleinerten Originalnetzes.

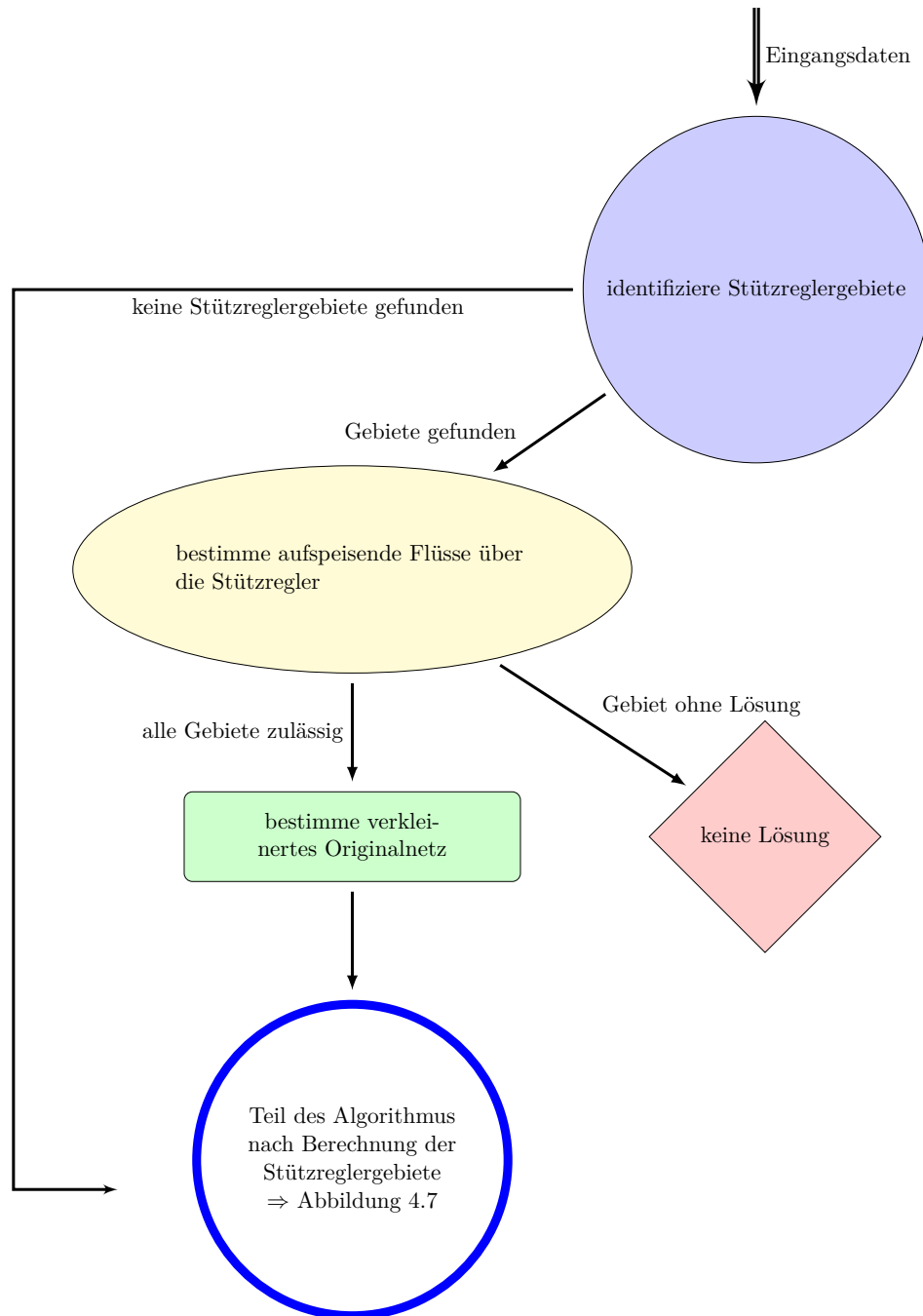


Abbildung 4.6.: Aufbau des Gesamtalgorithmus.

In Abbildung 4.7 wird der Teil des Gesamtalgorithmus beschrieben, welcher nach der Berechnung der Stützreglergebiete folgt. Zuerst wird versucht mittels der Netzwerkfluss-Heuristik eine aussichtsreiche Binärentscheidung zu fixieren. Ist dies nicht möglich, das Netzwerkflussproblem also unzulässig, so ist auch das zu Grunde liegende nichtlineare Gasflussproblem unzulässig. Andernfalls wird wie in Abschnitt 4.1.1 beschrieben eine Binärentscheidung fixiert. Wir versuchen nun das reduzierte nichtlineare Problem mit SNOPT zu lösen. Gelingt dies, so endet der Algorithmus zulässig. Gelingt dies nicht, so starten wir IPOPT mit dem letzten Iterationspunkt aus der Berechnung mit SNOPT. Finden wir nun eine Lösung, so endet der Algorithmus zulässig. Misslingt dies erneut so testen wir vordefinierte Konfigurationen bis entweder eine Lösung gefunden wurde, oder bis alle Konfigurationen getestet wurden (siehe auch Abschnitt 4.1.2). In letztem Fall endet der Algorithmus ohne Lösung. Der Test jeder einzelnen Konfiguration wird analog zum Test nach der Fixierung der Binärentscheidungen auf Grund der Netzwerkfluss-Heuristik durchgeführt. Zuerst lösen wir das reduzierte nichtlineare Problem mit SNOPT. Finden wir eine Lösung, so endet der Algorithmus zulässig. Finden wir keine, so starten wir IPOPT mit dem letzten Iterationspunkt aus der SNOPT Rechnung als Startpunkt. Finden wir nun einen Lösung, so endet der Algorithmus zulässig. Finden wir keine, so testen wir die nächste Konfiguration.

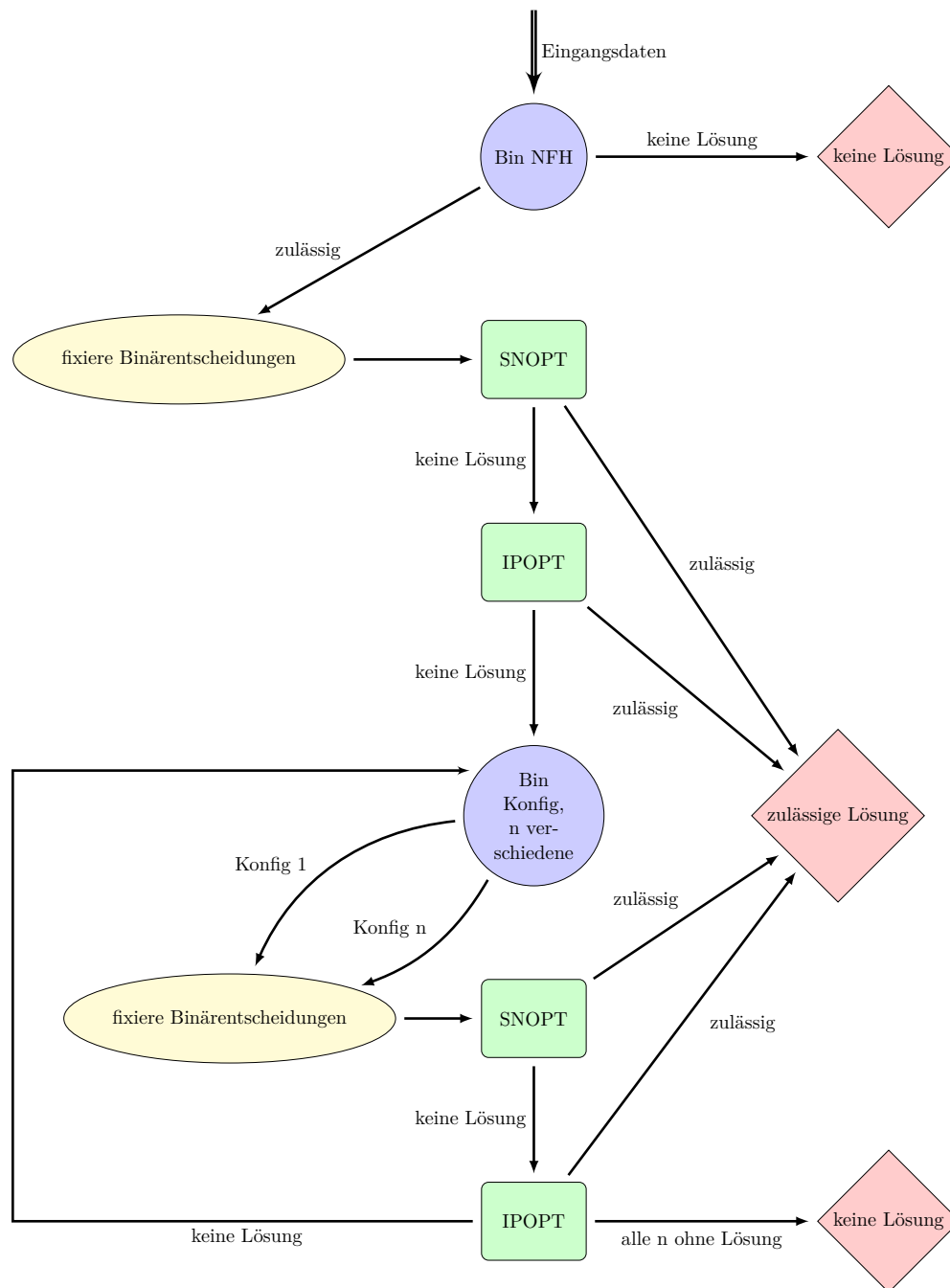


Abbildung 4.7.: Aufbau des Algorithmus nach Berechnung der Stützreglergebiete.

5. Reale Instanzen und Rechenergebnisse

5.1. Drei reale Netzinstanzen

Die Rechenergebnisse, die in diesem Abschnitt präsentiert werden, basieren auf realen Netzdaten von OGE. Das von OGE gesteuerte Leitungssystem ist ca. 12000 km lang und wird für die Netzplanung in drei Teilnetze unterteilt. Eine Aufteilung in H- und L-Gas-Netze ist aufgrund der physikalischen Eigenschaften der transportierten Gase entstanden. H-Gas („high calorific value Gas“) hat einen höheren Energiegehalt als L-Gas („low calorific value Gas“). Das H-Gas-Netz wird weiter in einen Nord- und einen Südteil gegliedert. Wir betrachten zwei Varianten¹ des H-Gas-Nord-Netzes, wobei Variante 1 für die Gruppe der ergänzten statistischen Szenarien und Variante 2 für die Expertennominierungen (siehe Abschnitt 5.2) genutzt wird. Beide Varianten unterscheiden sich nur an wenigen Stellen voneinander. Wir vergleichen die Rechenergebnisse auf dem L-Gas-Netz unter Nutzung des Dekompositionsansatzes und ohne das separate Berechnen und Herausschneiden von Stützreglergebieten. Dazu vergleichen wir insbesondere das originale L-Gas-Netz und das reduzierte. In der Abbildung 5.1 wird die Lage des H-Gas- und L-Gas-Netzes in Deutschland deutlich, wobei die Struktur der Netze, wie z. B. ihre Elemente und die Zahl der Kreise, nicht zu erkennen ist. Das H-Gas-Netz ist in rot dargestellt und das L-Gas-Netz in grün. Die Trennung des H-Gas-Netzes in den nördlichen und den südlichen Teil findet nordöstlich von Dortmund in Werne statt. Den folgenden Netzdarstellungen liegen keine Koordinaten zu Grunde, welche die Lage der Kanten und Knoten in der Realität widerspiegeln, sondern Koordinaten, mit denen ein Netz gut visualisiert werden kann. Es werden z. B. Knoten, die in der Realität sehr eng beieinander liegen auseinander gezogen. In Abbildung 5.2 sind beide Varianten des H-Gas-Nord-Netzes dargestellt. In Abbildung 5.3 ist das H-Gas-Süd-Netz dargestellt und in Abbildung 5.4 sind sowohl das originale als auch das reduzierte L-Gas-Netze visualisiert.

Ein Merkmal für die Komplexität eines Netzes ist die Anzahl der Kreise. In den Auflistungen zu den allgemeinen Netzdaten wird für die Bestimmung dieser Kreise angenommen, dass alle schaltbaren Elemente geöffnet sind. Die Anzahl der Kreise reduziert sich, wenn schaltbare Elemente geschlossen werden. Ein weiteres Indiz für die Komplexität eines Netzes ist die Anzahl von Stationen. Innerhalb einer Station kann es vordefinierte Gruppen geben, bei denen nicht alle Kombinationen von Binärentscheidungen erlaubt sind. Die Komplexität erhöht sich, wenn die Anzahl der möglichen Kombinationen von Binärentscheidungen, die innerhalb einer Station getroffen werden können, hoch ist. Befindet sich innerhalb einer Station keine vordefinierte Gruppe, so ergibt sich die Zahl der möglichen Entscheidungen durch alle Kombinationen der schaltbaren Elemente. Die Definition einer Station ist in Abschnitt 4.1.1 gegeben.

¹Die Variation des H-Gas-Nord-Netzes ist in zeitgleicher Arbeit an der Netzdarstellung beim Kooperationspartner OGE und bei uns begründet.

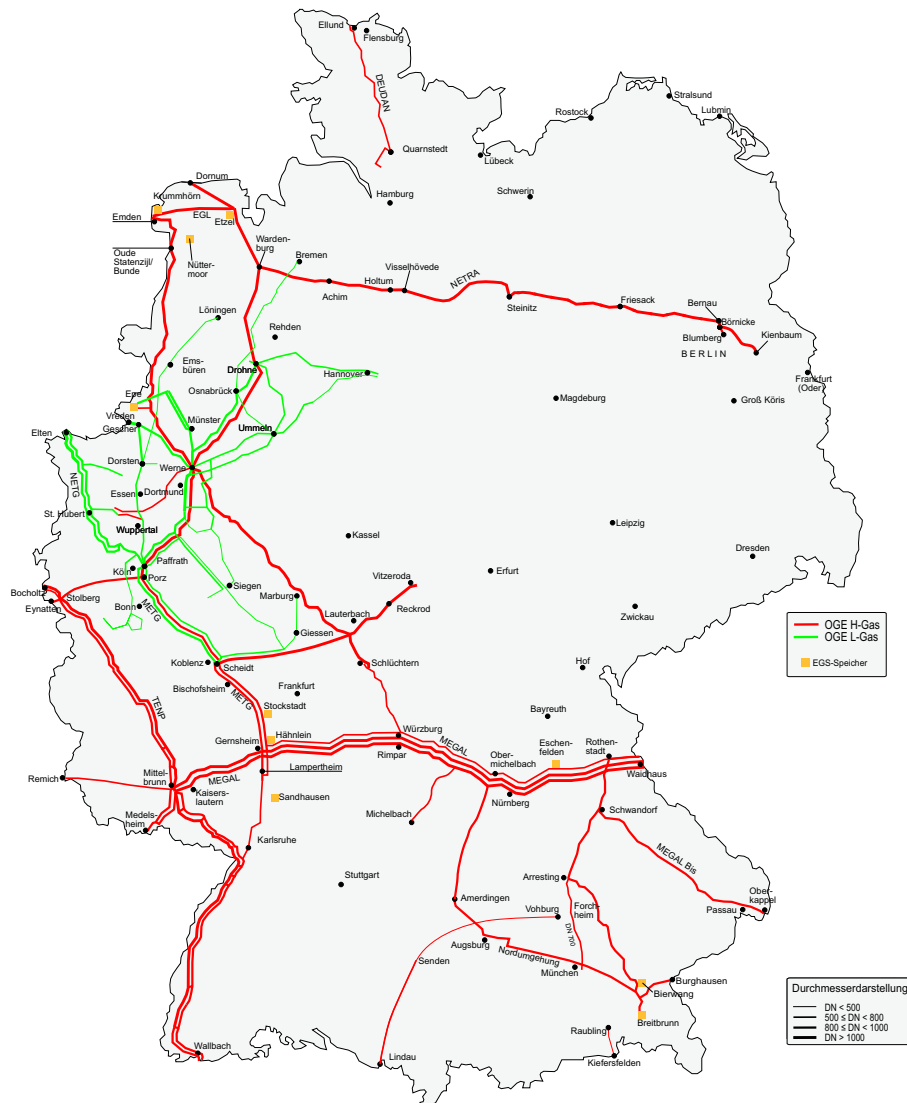


Abbildung 5.1.: Geografische Darstellung der von OGE betriebenen Netze.

5.1.1. H-Gas-Nord-Netz

Das Netz mit den wenigsten Kanten und Knoten und der geringsten Komplexität ist das H-Gas-Nord-Netz. Es reicht von der Nordseeküste bis ins Ruhrgebiet und von der niederländischen Grenze bis nach Wardenburg nahe Oldenburg. Eine Hauptleitung ist die NETRA [45] (**N**orddeutsche **E**rdgas **T**RAnsversale), welche in beiden Varianten des H-Gas-Netzes enthalten ist. In der Variante 2 gibt es eine zusätzliche Verbindung von Wardenburg bis nach Kienbaum nahe Berlin sowie drei kleine Netzteile, welche nicht über von OGE betriebene Leitungen mit dem Hauptnetz verbunden sind (siehe topologische Unterschiede zwischen den Abbildungen 5.2(a) und 5.2(b)). Eines dieser Netzteile ist die Leitung der DEUDAN [14] (**DE**utsch/**DÄ**nische Erdgastransport-Gesellschaft), welche das deutsche Netz mit Dänemark verbindet. Das H-Gas-Nord-Netz besteht sowohl aus einem Transportnetz, welches mit ca. 80 bar betrieben wird, als auch aus einem Verteilnetz mit Rohren geringen Durchmessers im Ruhrgebiet und maximalen Drücken an Senken von ca. 3 bar. Es gibt nur vier Stationen, für welche bei der Nutzung der Netzwerkfluss-Heuristik Entscheidungsregeln hinterlegt werden müssen. Detaillierte Informationen hierzu siehe im dritten Teil des Abschnitts „Die Interpretation der Lösung des Netzwerkflussproblems“ in Kapitel 4.1.1.

Bei beiden Varianten des H-Gas-Nord-Netzes ist die Zahl der Kreise mit 31 bzw. 32 moderat. Im Folgenden sind die Netzdaten für Variante 1 (siehe Abbildung 5.2(a)) aufgelistet:

- Anzahl Kanten: 622
 - Anzahl Rohre: 452
 - Anzahl Kurzschlüsse: 97
 - Anzahl Schieber: 35
 - Anzahl Widerstände: 9
 - Anzahl Regler: 23
 - Anzahl Verdichterstationen: 6
- Anzahl Knoten: 592
 - Anzahl Quellen: 31
 - Anzahl Senken: 129
 - Anzahl Innere Knoten: 432
- Anzahl Stationen: 4
 - Maximale Entscheidungszahl innerhalb einer Station: 53
- Anzahl Kreise²: 31

Im Folgenden sind die Netzdaten für Variante 2 (siehe Abbildung 5.2(b)) aufgelistet:

- Anzahl Kanten: 689

²Bei geöffneten schaltbaren Elementen.

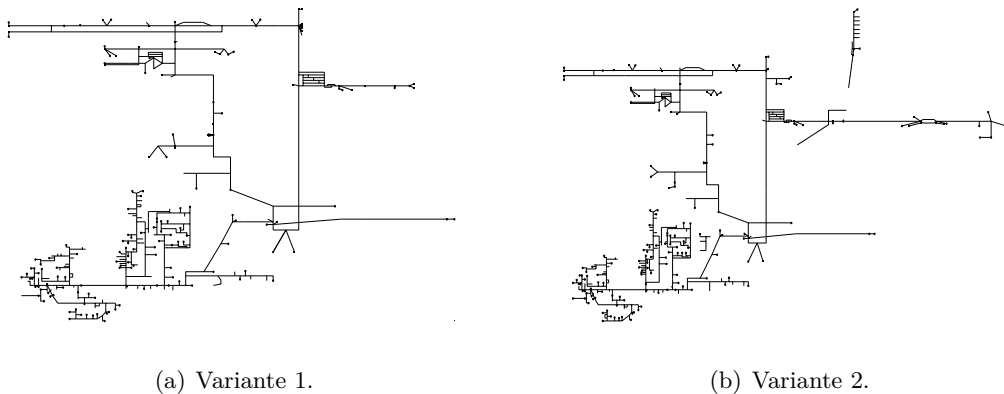


Abbildung 5.2.: Schematische Darstellung der H-Gas-Nord-Netze.

- Anzahl Rohre: 498
- Anzahl Kurzschlüsse: 116
- Anzahl Schieber: 33
- Anzahl Widerstände: 9
- Anzahl Regler: 26
- Anzahl Verdichterstationen: 7
- Anzahl Knoten: 661
 - Anzahl Quellen: 33
 - Anzahl Senken: 142
 - Anzahl Innere Knoten: 486
- Anzahl Stationen: 4
 - Maximale Entscheidungszahl innerhalb einer Station: 53
- Anzahl Kreise³: 32

5.1.2. H-Gas-Süd-Netz

Das H-Gas-Süd-Netz erstreckt sich von Werne in der Mitte Deutschlands bis zur österreichischen und schweizer Grenze. Es reicht von Tschechien bis Belgien, Luxemburg und Frankreich. In diesem Netz liegt die MEGAL [41] (**Mittel**Europäische **GA**s**Leitung**)⁴, eine große Ost-West Transportverbindung, durch welche Gas mit ca. 80 bar von Russland über Tschechien nach

³Bei geöffneten schaltbaren Elementen.

⁴In Bild 5.1 zu sehen.

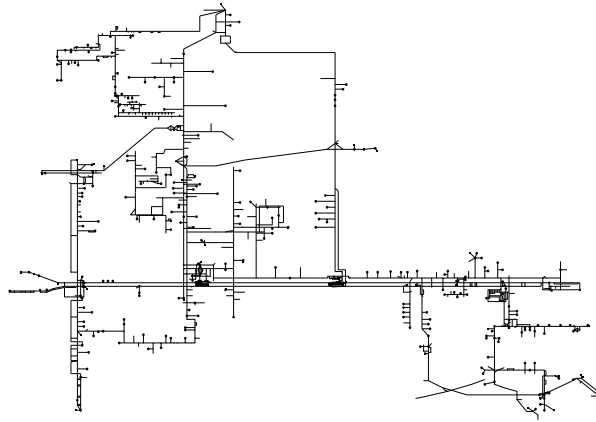


Abbildung 5.3.: Schematische Darstellung des H-Gas-Süd-Netzes.

Frankreich transportiert wird. Das Netz beinhaltet auch eine große Nord-Süd Transportverbindung, die TENP [66] (**T**rans-**E**uropa-**N**aturgas-**P**ipeline)⁵, durch welche Gas aus den Niederlanden, Belgien und der britischen Nordsee kommend über die Schweiz nach Italien transportiert wird. Diese Leitung wird zwischen 50 und 60 bar betrieben. An den Transportleitungen gibt es große Verdichterstationen mit vielen Elementen und Entscheidungsmöglichkeiten, um die Gasflüsse mit einem Druck von ca. 50 - 80 bar transportieren zu können. Zusätzlich gibt es im H-Gas-Süd-Netz kleinere Versorgungsnetze mit einem Druck von ca. 4 bar. In diesem Netz gibt es 47 Quellen, die das Gas aus verschiedenen Richtungen einspeisen können, was zu vielen unterschiedlichen Flusssituationen im Netz führt. Das H-Gas-Süd-Netz ist mit mehr als doppelt so vielen Kanten und Knoten größer als das H-Gas-Nord-Netz. Die deutlich größere Zahl an Kreisen ist ein Indiz für die erhöhte Komplexität. Im Vergleich zum L-Gas-Netz hat es nur etwa die Hälfte der Kanten und Knoten sowie weniger Kreise. Es ist aber durch die größere Anzahl von Stationen und Verdichterstationen komplexer als das L-Gas-Netz. Im L-Gas-Netz gibt es eine Station mit sehr vielen Entscheidungsmöglichkeiten. Im H-Gas-Süd-Netz gibt es dagegen einige Stationen mit mehr als 50 Entscheidungsmöglichkeiten.

Im Folgenden sind die Netzdaten für das H-Gas-Süd-Netz (siehe Abbildung 5.3) aufgelistet:

- Anzahl Kanten: 1842
 - Anzahl Rohre: 1136
 - Anzahl Kurzschlüsse: 328
 - Anzahl Schieber: 224
 - Anzahl Widerstände: 47
 - Anzahl Regler: 78

⁵In Bild 5.1 zu sehen.

- Anzahl Verdichterstationen: 29
- Anzahl Knoten: 1668
 - Anzahl Quellen: 47
 - Anzahl Senken: 266
 - Anzahl Innere Knoten: 1355
- Anzahl Stationen: 28
 - Maximale Entscheidungszahl innerhalb einer Station: 75
- Anzahl Kreise⁶: 175

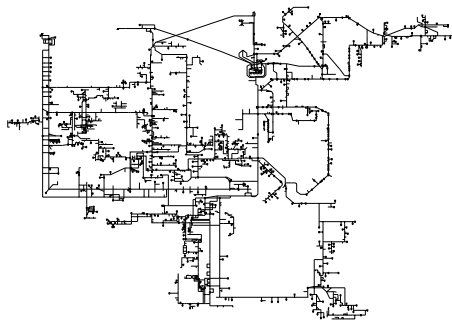
5.1.3. L-Gas-Netz

Das L-Gas-Netz erstreckt sich von Bremen im Norden bis nach Scheidt nahe Limburg im Süden sowie von Elten an der niederländischen Grenze im Westen bis Hannover im Osten (siehe Abbildung 5.1). Damit ist es von den hier vorgestellten Netzen flächenmäßig das kleinste. Das L-Gas-Netz ist hauptsächlich ein Verteilnetz mit kleinen Maximaldrücken an vielen Senken von z. B. 1,5 bar. Typisch für ein Verteilnetz ist die große Anzahl von Senken im Netz. Die NETG [44] (Leitung der **N**ord**r**heinischen **E**rdgas**T**ransport**l**eitungs**G**esellschaft) dient dem Transport von niederländischem Erdgas bis nach Bergisch Gladbach. Sie wird mit ca. 50 bar betrieben und durch die METG [42] (Leitung der **M**ittel**r**heinische **E**rdgas**T**ransport**l**eitungs**G**esellschaft) bis nach Gernsheim verlängert. In Abbildung 5.4(a) kann man die feine Verästelung der Verteilsysteme in diesem Netz sehen. Es gibt mit Werne nur eine komplexe Verdichterstation mit 5832 Entscheidungsmöglichkeiten. Dieses Netz besitzt von den uns vorliegenden Netzen die größte Anzahl von Kanten und Knoten. Das liegt daran, dass diese Anzahl davon abhängt, in wie viele Teilstücke eine Leitung beim Erzeugen der Netzdaten gegliedert wird. Die Anzahl ist daher kein Hinweis auf die reale Größe des Netzes. Eine Besonderheit des L-Gas-Netzes ist die Existenz von Stützreglern und daraus resultierend von 3 Stützreglergebieten. In Abschnitt 3.1 wird ein Dekompositionsansatz vorgestellt, welcher diese Besonderheit nutzt, und die Stützreglergebiete separat berechnet. Das Herausschneiden der Stützreglergebiete führt zu einem reduzierten L-Gas-Netz, auf welchem im Vergleich zum Original leichter Lösungen für Nominierungen gefunden werden können. In Abbildung 5.4 ist ein Vergleich der beiden L-Gas-Netze dargestellt. Bei den Stützreglergebieten handelt es sich um Versorgungsnetze, welche von Stützreglern aufgespeist werden und für welche keine durch schaltbare Elemente induzierten Binärentscheidungen getroffen werden müssen.

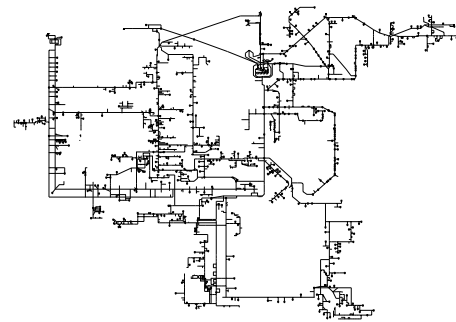
Im Folgenden sind die Netzdaten für das originale L-Gas-Netz (siehe Abbildung 5.4(a)) aufgelistet:

- Anzahl Kanten: 4424
 - Anzahl Rohre: 3638

⁶Bei geöffneten schaltbaren Elementen.



(a) Original L-Gas-Netz.



(b) Reduziertes L-Gas-Netz.

Abbildung 5.4.: L-Gas-Netz: Original und Reduziertes.

- Anzahl Kurzschlüsse: 319
- Anzahl Schieber: 308
- Anzahl Widerstände: 26
- Anzahl Regler: 121
- Anzahl Verdichterstationen: 12
- Anzahl Knoten: 4165
 - Anzahl Quellen: 5
 - Anzahl Senken: 689
 - Anzahl Innere Knoten: 3471
- Anzahl Stationen: 10
 - Maximale Entscheidungszahl innerhalb einer Station: 5832
- Anzahl Kreise⁷: 260

Im Folgenden sind Netzdaten für das reduzierte L-Gas-Netz (siehe Abbildung 5.4(b)) aufgelistet:

- Anzahl Kanten: 3753
 - Anzahl Rohre: 3062
 - Anzahl Kurzschlüsse: 296
 - Anzahl Schieber: 251
 - Anzahl Widerstände: 26

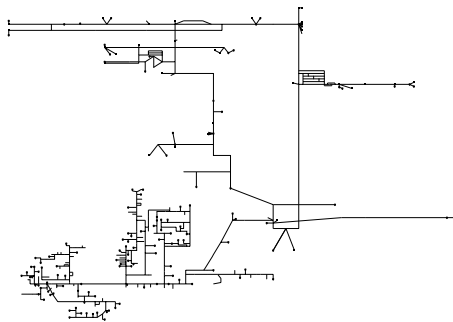
⁷Bei geöffneten schaltbaren Elementen.

- Anzahl Regler: 106
- Anzahl Verdichterstationen: 12
- Anzahl Knoten: 3542
 - Anzahl Quellen: 5
 - Anzahl Senken: 618
 - Anzahl Innere Knoten: 2919
- Anzahl Stationen: 10
 - Maximale Entscheidungszahl innerhalb einer Station: 5832
- Anzahl Kreise⁸: 212

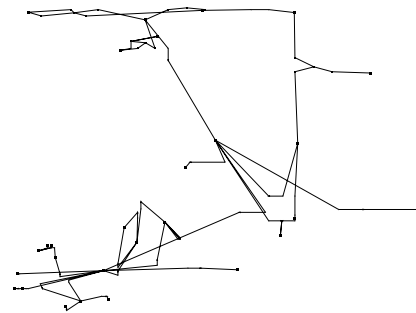
5.1.4. Vergleich der Netze

Die drei realen Netzinstanzen H-Gas-Nord (exemplarisch Variante 1), H-Gas-Süd und L-Gas-Netz (exemplarisch ohne Dekomposition) unterscheiden sich nicht nur in ihrer Größe, sondern auch in ihrer Komplexität. So variieren die Anzahl der Kreise und die Anzahl der Stationen, für welche Entscheidungen in der Netzwerkfluss-Heuristik getroffen werden müssen. Ein weiteres Indiz für Unterschiede in der Komplexität der Netze zeigt sich beim Vergleich zwischen den Originalnetzen und deren Vereinfachungen, welche für die Netzwerkfluss-Heuristik gemäß Abschnitt „Vereinfachungen des Netzes“ in Kapitel 4.1.1 erstellt werden. Beim H-Gas-Nord-Netz kann die Zahl der Kanten durch die Vereinfachung auf etwa ein Drittel der Kanten im Originalnetz reduziert werden. Im L-Gas-Netz kann sie auf etwas weniger als die Hälfte reduziert werden und im H-Gas-Süd-Netz ist die Zahl der Kanten im vereinfachten Netz etwas größer als die Hälfte der Zahl der Kanten im Originalnetz. Dies bedeutet, dass es im H-Gas-Süd-Netz am wenigsten Gebiete gibt, welche jeweils zu einem Subnetz zusammengefasst werden können, was wiederum ein Indiz für eine komplizierte Netzstruktur ist. Beim H-Gas-Nord-Netz ist die Veränderung durch die Vereinfachung am deutlichsten. In den Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 werden die jeweiligen Originalnetze und ihre Vereinfachungen gegenübergestellt.

⁸Bei geöffneten schaltbaren Elementen.

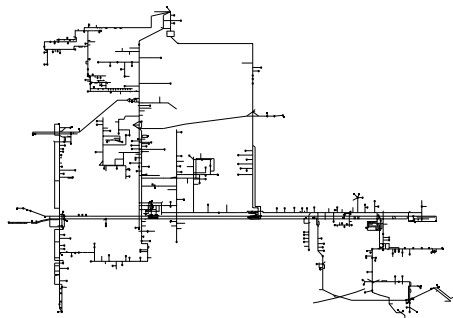


(a) Original mit 622 Kanten.

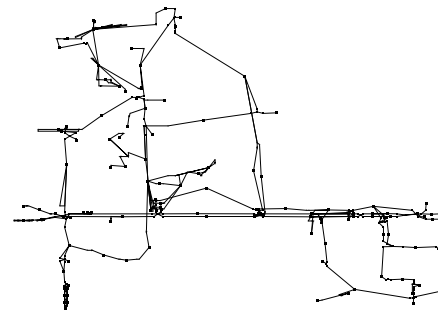


(b) Vereinfachung mit 209 Kanten.

Abbildung 5.5.: H-Gas-Nord-Netz: Original und Vereinfachung.

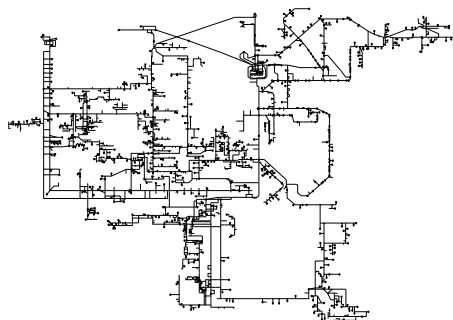


(a) Original mit 1842 Kanten.



(b) Vereinfachung mit 956 Kanten.

Abbildung 5.6.: H-Gas-Süd-Netz: Original und Vereinfachung.



(a) Original mit 4424 Kanten.



(b) Vereinfachung mit 1838 Kanten.

Abbildung 5.7.: L-Gas-Netz: Original und Vereinfachung.

5.2. Zwei Gruppen von Nominierungen

Den Rechenergebnissen liegen zwei Gruppen von Nominierungen zu Grunde, welche in diesem Abschnitt erläutert werden. Die Gruppe der Expertennominierungen versucht möglichst extreme Flusssituationen abzudecken. Bei den aus statistischen Szenarien ergänzten Nominierungen wird durch statistische Auswertungen von historischen Messdaten der Ausspeisungen versucht, eine Vorhersage für die Ausspeisungen in der Zukunft zu treffen.

5.2.1. Expertennominierungen

Expertennominierungen sind Nominierungen, welche bei OGE in langjähriger Erfahrung entstanden sind. Für jedes Netz werden dort Nominierungen erstellt, welche bilanziert sind und bestimmte, extreme Flusssituationen im Netz modellieren sollen. So werden einige, theoretisch mögliche Flusssituationen abgedeckt wie z.B. der Transport eines großen Flusses im Winter von Nord nach Süd, von Süd nach Nord, von Ost nach West und von West nach Ost. Eine extreme Flusssituation ist auch der Transport von wenig Gas im Sommer. Dabei werden netztopologisch eng beieinander liegende Quellen und Senken ohne statistische Daten in ihren Buchungsgrenzen⁹ maximiert und minimiert. Bei OGE geht man davon aus, dass diese Nominierungen ein guter Test für die Belastbarkeit der Netze sind. Wenn es für jede dieser Nominierungen eine zulässige Netzaussteuerung gibt, also eine Einstellung der schaltbaren Elemente sowie Drücke und Flüsse innerhalb vorgegebener Grenzen, erwartet man, dass es auch für alle anderen Nominierungen innerhalb der Buchungsgrenzen eine zulässige Aussteuerung gibt.

Für das H-Gas-Nord-Netz in der Variante 2 liegen uns 40 Expertennominierungen vor. Für das L-Gas-Netz existieren 28 Expertennominierungen.

5.2.2. Ergänzung statistischer Szenarien zu Nominierungen

Diese Gruppe von Szenarien basiert auf der Idee, auf Grundlage historischer Daten über den Gasfluss an Senken, Vorhersagen über den zukünftigen Gasfluss an diesen Senken zu machen. Weil Gas zu großen Teilen zum Heizen und Stromerzeugen verwendet wird, ist ein temperaturabhängiger Verbrauch von Kraftwerken und einigen Industrieabnehmern typisch.

Für das H-Gas-Netz werden Messdaten an Senken in einer Zeitperiode von 6 Jahren (von Januar 2004 bis Mai 2010) genutzt. Diese Daten bestehen aus den Gasflüssen an den Senken und aus den meteorologischen Tagesmitteltemperaturen vom deutschen Wetterdienst [15] an einem Referenzort. Daraus kann für jede Senke ein Datensatz aus Wertepaaren bestehend aus der Temperatur und dem abgenommenen Gasflusses gebildet werden. Diese Datensätze werden nach der Art ihrer Temperaturabhängigkeit typisiert, was wiederum bei der Zuweisung eines Verteilungstyps hilfreich ist. Es werden 15 Temperaturklassen in den Grenzen von -15°C bis 40°C eingeführt, wobei die Temperaturintervalle am Rand größer sind, um signifikante Datenmengen zur Verfügung zu haben. Für jede Senke werden zu den Temperaturklassen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für den Gasfluss geschätzt. Auf Grundlage dieser Verteilungen werden mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden [40] statistische Szenarien mit Gasflüssen an

⁹Vertraglich festgelegte maximale und minimale Flüsse.

Senken mit signifikanten Datensätzen erzeugt. Details zum Verfahren der Szenariogenerierung siehe in [20, 33]. Pro Temperaturintervall wurden 50 Szenarien erzeugt. Diese Anzahl wurde mittels Szenarioreduktion [27, 28] verringert, um Rechenzeit zu sparen.

Die statistischen Szenarien werden anschließend zu bilanzierten Nominierungen durch die Quellen und Senken ohne statistisch auswertbare Daten mit Hilfe eines gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblems ergänzt. Bei dieser Ergänzung wird die Vertragssituation von OGE berücksichtigt. Zu jedem statistischen Szenario werden mehrere Ergänzungen berechnet. Diese unterscheiden sich in der Zielfunktion, welche entweder zufällige Koeffizienten für die Flüsse an den zu ergänzenden Knoten enthält oder Einspeisungen von vorgegebenen Quellen zu maximieren versucht. Letztere Zielfunktion ist in Anlehnung an die Expertennominierungen entstanden.

Die übrig gebliebenen statistischen Szenarien wurden jeweils mit 15 Ergänzungen vervollständigt. Insgesamt gibt es 3882, aus statistischen Szenarien ergänzte, bilanzierte Nominierungen für das H-Gas-Netz.

Weil die Messdaten und die Vertragsdaten nicht getrennt nach H-Gas-Nord-Netz und H-Gas-Süd-Netz vorliegen, werden die Nominierungen für das gesamte H-Gas-Netz erstellt und anschließend getrennt.

5.3. Rechenergebnisse

Die in diesem Abschnitt präsentierten Rechenergebnisse wurden mit Hilfe der Modellierungssprache GAMS¹⁰ [22] in der Version 24.1.2 erreicht. Für die Berechnung des Netzwerkflussproblems wurde CONOPT¹¹ [11] Version 4 verwendet. SNOPT¹² [62] wurde in der Version 7.2-12 benutzt. Für IPOPT¹³ [31] in der Version 3.11 haben wir den linearen Löser MA27 gewählt. Alle Rechnungen wurden auf dem selben 64 bit Rechner mit 16 GB RAM durchgeführt.

Die Rechenergebnisse wurden mit folgender Parametereinstellung erzielt:

1. IPOPT-Einstellungen, welche sich von der Standardeinstellung unterscheiden:
 - a) Angabe des lineare Algebra Pakets zur Lösung der linearen Systeme:
`linear_solver = ma27.`
 - b) Maximale Iterationszahl:
`max_iter = 3500.`
 - c) Konvergenztoleranz. IPOPT endet zulässige, wenn der NLP Fehler kleiner ist als die Konvergenztoleranz und die gewünschte duale Zulässigkeit erreicht ist. Die Fehlertoleranz bei der Einhaltung der Nebenbedingungen muss eingehalten werden und die

¹⁰General Algebraic Modeling System.

¹¹CONOPT ist ein Löser für hochdimensionale nichtlineare Optimierungsprobleme. Der Löser wurde von ARKI Consulting & Development A/S in Bagsvaerd, Dänemark entwickelt.

¹²SNOPT wurde von P. Gill, W. Murray und M. Saunders entwickelt und ist ein Löser für hochdimensionale lineare und nichtlineare Optimierungsprobleme.

¹³IPOPT ist ein Software Paket für hochdimensionale nichtlineare Optimierungsprobleme, welches auf Inneren-Punkte-Verfahren basiert.

Komplementaritätsbedingungen müssen die gewünschte Genauigkeit erreicht haben:
 $\text{tol}=10^{-7}$.

- d) Schwellwert für die Einhaltung der Komplementaritätsbedingungen:
 $\text{compl_inf_tol} = 10^{-4}$.
- e) Schwellwert für die Einhaltung der Nebenbedingungen:
 $\text{constr_viol_tol}=10^{-5}$.
- f) Angabe eines Optimalitätsfehlers, ab dem man Lösungen akzeptieren möchte. Lösungen innerhalb des akzeptierten Fehlers führen erst dann zu einem Ende des Algorithmus mit dem Ergebnis: „akzeptierte Lösung“, wenn in acceptable_iter Iterationsschritten hintereinander die hier angegebene Grenze eingehalten wird:
 $\text{acceptable_tol} = 10^{-4}$.
- g) Angabe der Anzahl von Iteration, welche innerhalb des akzeptierten Optimalitätsfehlers liegen müssen, damit der Algorithmus beendet wird:
 $\text{acceptable_iter} = 4$.

2. SNOPT-Einstellung, welche sich von der Standardeinstellung unterscheidet:
 Maximale Iterationszahl: Major Iterations limit = 500.

3. Toleranz der Netzwerkfluss-Heuristik¹⁴:
 Schaltbares Element wird als geschlossen interpretiert: $\varepsilon_{\text{NF}} = 10^{-4}$.

4. Toleranzen des reduzierten NLP (siehe Definitionen in Abschnitt 2.3):

Aktive Elemente:	$\varepsilon_{\text{AE}} = 10^{-4}$.
Kreis:	$\varepsilon_{\text{Kr}} = 10^{-4}$.
Bypass:	$\varepsilon_{\text{b}} = 10^{-4}$.
Durchfluss:	$\varepsilon_{\text{f}} = 10^{-3}$.
Druckdifferenz:	$\varepsilon_{\text{dd}} = 10^{-3}$.
Druckverhältnis:	$\varepsilon_{\text{dv}} = 10^{-3}$.
Stützregler:	$\varepsilon_{\text{sr}} = 10^{-4}$.
Widerstand:	$\varepsilon_{\text{w}} = 10^{-4}$.

Der Lösungsprozess pro gegebener Nominierung wird in Abschnitt 4.2 beschrieben. Im folgenden Abschnitt sind die Rechenergebnisse pro Datensatz (Netz mit zugehörigen Nominierungen, Bestimmung der Stationen und Konfigurationsbibliothek) durch eine Übersichtstabelle und Abbildungen dargestellt. In den Tabellen steht jeweils in der ersten Spalte die Anzahl der gelösten Nominierungen unterteilt nach der genutzten Heuristik zur Fixierung der Binärentscheidungen. In der ersten Zeile steht die Anzahl der Nominierungen, welche mit Fixierungen der Netzwerkfluss-Heuristik gelöst werden konnten. In der zweiten Zeile steht die

¹⁴siehe Definition in Kapitel 4.1.1 Abschnitt „Die Interpretation der Lösung des Netzwerkflussproblems“.

Anzahl der gelösten Nominierungen mit Binärentscheidungen aus vorgegebenen Konfigurationen. In der dritten Spalte ist angegeben, bei wie vielen der gelösten Nominierungen jeweils der zweite Löser IPOPT genutzt werden musste. In der letzten Spalte steht die Anzahl der Nominierungen ohne gefundene Lösung.

In der anschließenden Abbildung ist eine Auswertung der benötigten Rechenzeiten dargestellt. Pro Instanz wurden zur Ermittlung der Rechenzeit die benötigten Laufzeiten von CONOPT, SNOPT und IPOPT gemäß dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Lösungsprozess addiert. Im Fall des Dekompositionsansatzes werden zusätzlich die Laufzeiten für die Berechnung der einzelnen Stützreglergebiete addiert. In den Unterabbildungen (a), (b) und (c) ist eine Darstellung der Rechenzeiten getrennt nach gelösten und ungelösten, sowie aller Nominierungen zusammen zu sehen. Die Instanzen wurden nach aufsteigender Rechenzeit sortiert. Zusätzlich ist eine Übersicht über die Konfigurationen mit den zugehörigen Rechenzeiten gegeben, welche bei zulässigen Nominierungen benutzt wurden. Die nullte Fixierung ist jeweils aus der Netzwerkfluss-Heuristik abgeleitet.

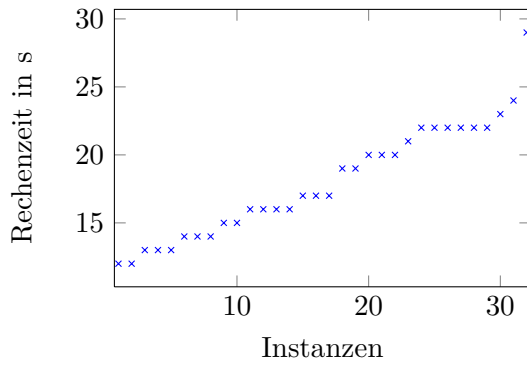
5.3.1. H-Gas-Nord-Netz

Expertenominierungen In Tabelle 5.1 ist eine Übersicht der Ergebnisse auf dem H-Gas-Nord-Netz für 40 Expertenominierungen zu sehen. 23 Nominierungen konnten mit einer Fixierung der Binärentscheidungen durch die Netzwerkfluss-Heuristik gelöst werden. Neun weitere konnten durch Fixierungen aus vorgegebenen Konfigurationen aus der Konfigurationsbibliothek gelöst werden. Für fünf der 23 durch Fixierung aus der Netzwerkfluss-Heuristik gelösten Nominierungen wurde mit dem ersten Löser SNOPT keine Lösungen gefunden. Mit dem letzten Punkt aus SNOPT als Startpunkt für den Löser IPOPT wurde für diese Nominierungen mit IPOPT eine Lösung gefunden. Bei der Fixierung durch vorgegebene Konfigurationen wurde für sechs der neun Nominierungen der zweite Löser benötigt. Für 20 % der Expertenominierungen konnte keine Lösung gefunden werden.

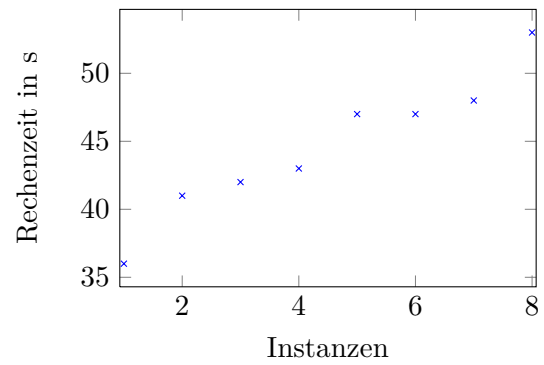
In Abbildung 5.8 ist eine Auswertung der benötigten Rechenzeiten dargestellt. Die Nominierungen, für welche keine zulässige Lösung gefunden wurde, haben oftmals eine längere Laufzeit, weil alle 15 Konfigurationen getestet wurden. In den Abbildungen 5.8(a) und 5.8(b) ist eine Darstellung der Rechenzeiten getrennt nach gelösten und ungelösten Nominierungen zu sehen.

Anzahl der gelösten Nominierungen	Binärentscheidungen fixiert durch	Zweiter Löser IPOPT benötigt	Anzahl der ungelösten Nominierungen
23	Netzwerkfluss-Heuristik	5	8
9	Konfigurationsbibliothek	6	

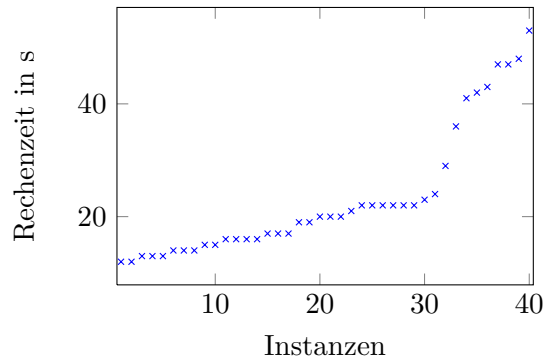
Tabelle 5.1.: Ergebnisübersicht.



(a) Rechenzeiten aller Instanzen mit gefundenen Lösungen.



(b) Rechenzeiten aller Instanzen ohne Lösung.



(c) Rechenzeiten aller Instanzen.

Abbildung 5.8.: Auswertung der Rechenzeit.

In Abbildung 5.8(c) ist der Verlauf der Rechenzeiten aller 40 Nominierungen dargestellt. Bei den 40 Expertennominierungen auf dem H-Gas-Nord-Netz ist zu beobachten, dass jede gelöste Nominierung eine kürzere Rechenzeit aufweist als jede ungelöste. Dies ist dadurch zu Begründen, dass die Konfigurationen 4 bis 15 zu keinen weiteren Lösungen geführt haben wie in Abbildung 5.9 zu sehen ist. Für die ungelösten Nominierungen wurden diese zwölf zusätzlichen Konfigurationen getestet und erhöhen die benötigte Rechenzeit.

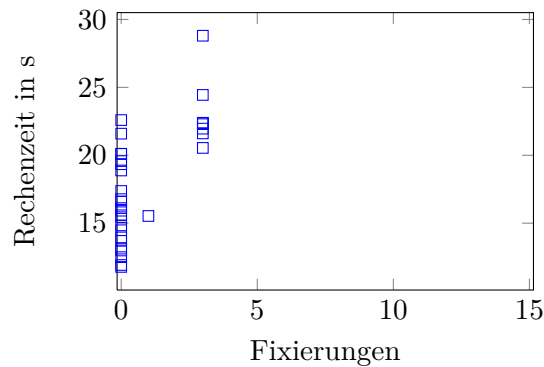


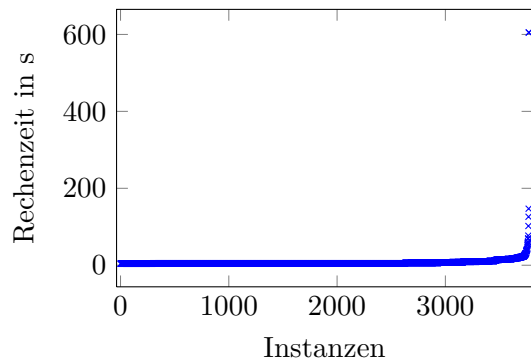
Abbildung 5.9.: Auswertung der genutzten Fixierungen bei zulässiger Nominierung.

Ergänzte statistische Szenarien In Tabelle 5.2 ist eine Übersicht der Ergebnisse auf dem H-Gas-Nord-Netz für 3882 aus statistischen Szenarien ergänzten Nominierungen zu sehen. Für 3405 dieser Nominierungen wurde mit einer Fixierung der Binärentscheidungen durch die Netzwerkfluss-Heuristik eine Lösung gefunden. Für 366 weitere wurden Lösungen durch Fixierungen aus vorgegebenen Konfigurationen aus der Konfigurationsbibliothek gefunden. Für 265 der mit Fixierungen der Netzwerkfluss-Heuristik gelösten Nominierungen wurde der zweite Löser IPOPT benötigt. Bei der Fixierung durch vorgegebene Konfigurationen war dies für 75 der 366 Nominierungen nötig. Für 2,86 % der aus statistischen Szenarien ergänzten Nominierungen konnte keine Lösung gefunden werden.

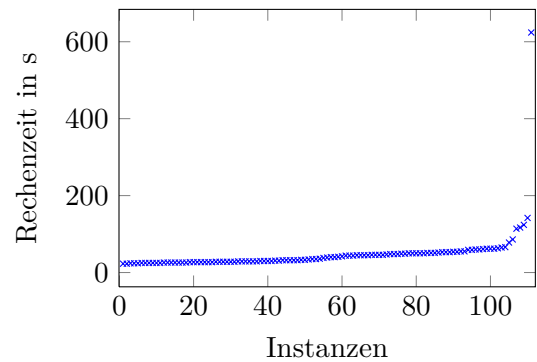
In den Abbildungen 5.10 (a) und 5.10(b) ist eine Darstellung der Rechenzeiten getrennt nach gelösten und ungelösten Nominierungen zu sehen. In Abbildung 5.10(c) ist der Verlauf der Rechenzeiten aller 3882 Nominierungen dargestellt. Auffällig sind die zwei zulässigen Nominierung und die Nominierung ohne zulässige Lösung mit mehr als 600s Rechenzeit. In den drei Fällen konvergierte SNOPT schlecht. Vernachlässigt man diese Ausreißer ergeben sich die Verläufe der Rechenzeiten wie in Abbildung 5.11 dargestellt. Es wird erneut deutlich, dass die Kurve in Abbildung 5.11(a) langsamer ansteigt als die Kurve für die Instanzen ohne zulässige Lösung in Abbildung 5.11(b) bei gleicher Skalierung der y-Achse. Im Gegensatz zu den Er-

Anzahl der gelösten Nominierungen	Binärentscheidungen fixiert durch	Zweiter Löser IPOPT benötigt	Anzahl der ungelösten Nominierungen
3405	Netzwerkfluss-Heuristik	265	111
366	Konfigurationsbibliothek	75	

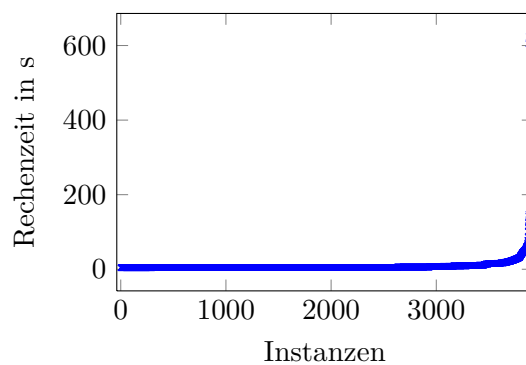
Tabelle 5.2.: Ergebnisübersicht



(a) Rechenzeiten aller Instanzen mit gefundenen Lösungen.



(b) Rechenzeiten aller Instanzen ohne Lösung.

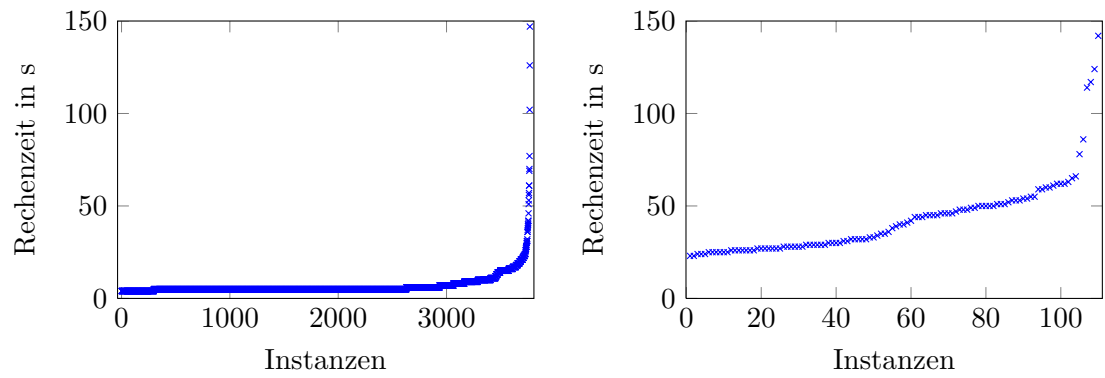


(c) Rechenzeiten aller Instanzen.

Abbildung 5.10.: Auswertung der Rechenzeit.

gebnissen der Expertennominierungen auf dem H-Gas-Nord-Netz gibt es gelöste und ungelöste Nominierungen, bei denen die gelösten Nominierungen eine längere Rechenzeit haben als die ungelösten.

In Abbildung 5.12 ist die Aufteilung der genutzten Fixierungen auf die gelösten Nominierungen zu sehen. Es wurden 13 Konfigurationen getestet, von denen sieben zu zulässigen Nominierungen geführt haben.



(a) Rechenzeiten aller Instanzen mit gefundenen Lösungen. (b) Rechenzeiten aller Instanzen ohne Lösung.

Abbildung 5.11.: Auswertung der Rechenzeit bei Vernachlässigung der 3 Ausreißer.

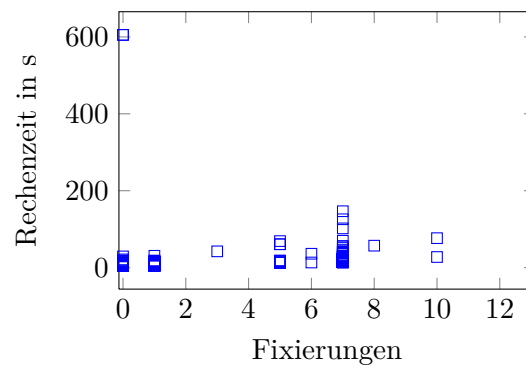


Abbildung 5.12.: Auswertung der genutzten Fixierungen bei zulässiger Nominierung.

5.3.2. H-Gas-Süd-Netz

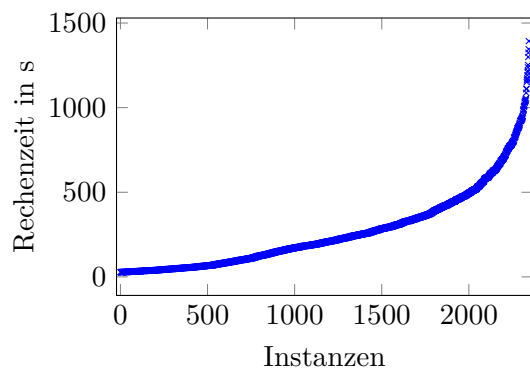
Ergänzte statistische Szenarien In Tabelle 5.3 ist eine Übersicht der Ergebnisse auf dem H-Gas-Süd-Netz für 3882 aus statistischen Szenarien ergänzten Nominierungen zu sehen. Für 548 dieser Nominierungen konnte mit einer Fixierung der Binärentscheidungen durch die Netzwerkfluss-Heuristik eine Lösung gefunden werden. Für 1796 weitere wurden Lösungen durch Fixierungen aus vorgegebenen Konfigurationen aus der Konfigurationsbibliothek gefunden. Für 348 der 548 durch Fixierung aus der Netzwerkfluss-Heuristik gelösten Nominierungen wurde der zweite Löser IPOPT benötigt. Bei Lösungen durch Fixierung mittels vorgegebener Konfiguration war dies für 908 der 1796 Nominierungen nötig. Für 39,62 % der 3882 aus statistischen Szenarien ergänzten Nominierungen konnte keine Lösung gefunden werden.

In Abbildung 5.13 ist der Verlauf der Rechenzeiten der 3882 Nominierungen dargestellt. Die maximale Rechenzeit für eine Instanz ohne zulässige Lösung beträgt auf dem H-Gas-Süd-Netz 1915 s (ca. 30 min) und für eine zulässige Instanz 1393 s (ca. 23 min).

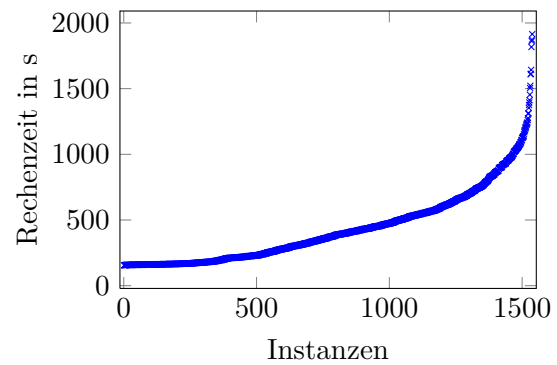
In Abbildung 5.14 ist die Aufteilung der genutzten Fixierungen auf die gelösten Nominierungen zu sehen. Es wurden 18 Konfigurationen getestet. Jede Konfiguration führte zu zulässigen Nominierungen.

Anzahl der gelösten Nominierungen	Binärentscheidungen fixiert durch	Zweiter Löser IPOPT benötigt	Anzahl der ungelösten Nominierungen
548	Netzwerkfluss-Heuristik	348	1538
1796	Konfigurationsbibliothek	908	

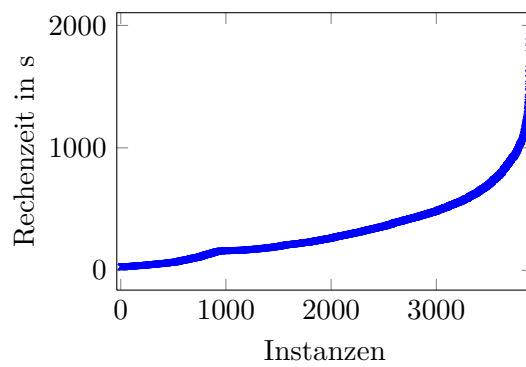
Tabelle 5.3.: Ergebnisübersicht



(a) Rechenzeiten aller Instanzen mit gefundenen Lösungen.



(b) Rechenzeiten aller Instanzen ohne Lösung.



(c) Rechenzeiten aller Instanzen.

Abbildung 5.13.: Auswertung der Rechenzeit.

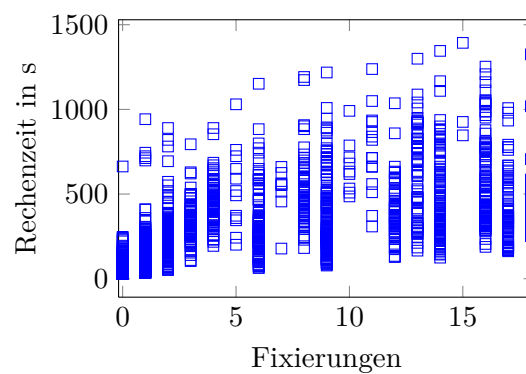


Abbildung 5.14.: Auswertung der genutzten Fixierungen bei zulässiger Nominierung.

5.3.3. L-Gas-Netz

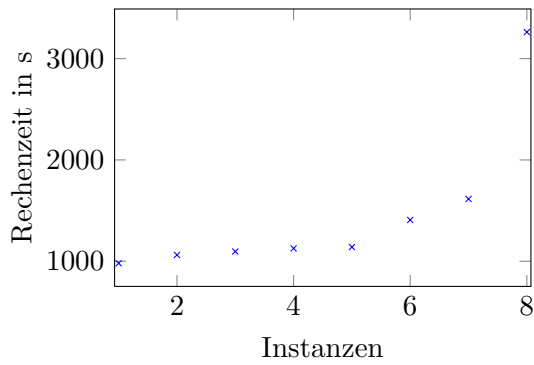
Ergänzte statistische Szenarien ohne Dekomposition In Tabelle 5.4 ist eine Übersicht der Ergebnisse auf dem L-Gas-Netz für 28 Expertennominierungen zu sehen. Mit der Fixierung der Binärentscheidungen durch die Netzwerkfluss-Heuristik konnte nur eine Nominierung gelöst werden. Für die gelöste Instanz wurde der zweite Löser benötigt. Durch gegebene Konfigurationen aus der Konfigurationsbibliothek konnten sieben Nominierungen gelöst werden. Für vier wurde der zweite Löser IPOPT benötigt. Für 71,43 % der 28 Nominierungen konnte keine Lösung gefunden werden.

In den Abbildungen 5.15(a) und 5.15(b) sind die Rechenzeiten getrennt nach gelösten und ungelösten Nominierungen dargestellt. In Abbildung 5.15(c) ist der Verlauf der Rechenzeiten für die 28 Expertennominierungen abgebildet. Die maximale Rechenzeit für eine Instanz ohne zulässige Lösung beträgt auf dem L-Gas-Netz 3980 s (ca. 66 min) und für eine zulässige Instanz 3262 s (ca. 54 min). Diese maximale Rechenzeit für die gelösten Instanzen ist deutlich größer als die übrigen Rechenzeiten der gelösten Nominierungen, wie in Abbildung 5.15(a) zu erkennen ist.

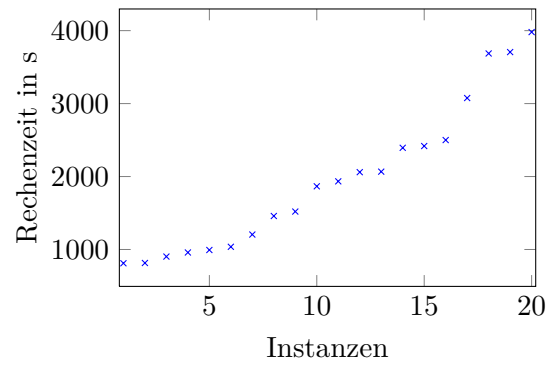
In Abbildung 5.16 ist die Aufteilung der genutzten Fixierungen auf die gelösten Nominierungen zu sehen. Es wurden acht Konfigurationen getestet. Nicht jede Konfiguration führte zu zulässigen Nominierungen.

Anzahl der gelösten Nominierungen	Binärentscheidungen fixiert durch	Zweiter Löser IPOPT benötigt	Anzahl der ungelösten Nominierungen
1	Netzwerkfluss-Heuristik	1	20
7	Konfigurationsbibliothek	4	

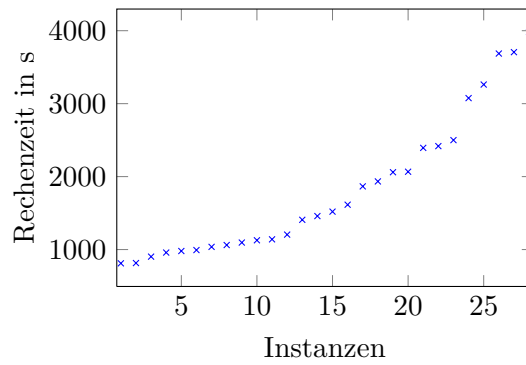
Tabelle 5.4.: Ergebnisübersicht



(a) Rechenzeiten aller Instanzen mit gefundenen Lösungen.



(b) Rechenzeiten aller Instanzen ohne Lösung.



(c) Rechenzeiten aller Instanzen.

Abbildung 5.15.: Auswertung der Rechenzeit.

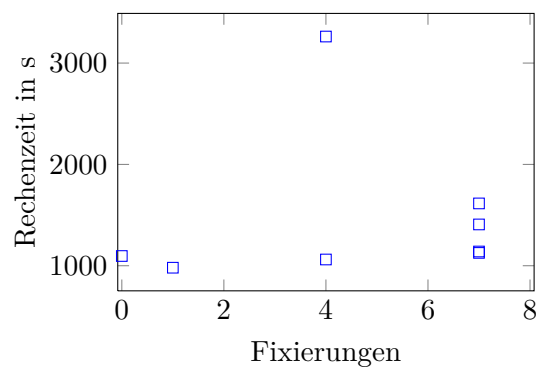


Abbildung 5.16.: Auswertung der genutzten Fixierungen bei zulässiger Nominierung.

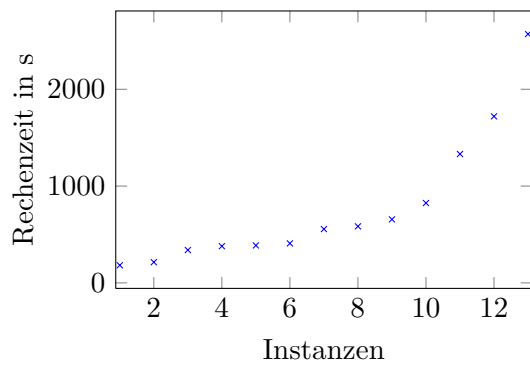
Ergänzte statistische Szenarien mit Dekomposition In Tabelle 5.5 ist eine Übersicht der Ergebnisse auf dem L-Gas-Netz unter Nutzung des in Kapitel 3.1 vorgestellten Dekompositionsansatzes für 28 Expertenominierungen zu sehen. Mit der Fixierung der Binärentscheidungen durch die Netzwerkfluss-Heuristik konnte für acht Nominierung eine Lösung gefunden werden, wobei immer der zweite Löser IPOPT benötigt wurde. Weitere fünf Nominierungen konnten durch gegebene Konfigurationen aus der Konfigurationsbibliothek gelöst werden. Der Anteil der ungelösten Nominierungen auf dem L-Gas-Netz konnte von 71,43 % ohne Dekomposition auf 53,57 % mit Nutzung der Dekomposition reduziert werden. Fixierungen auf Grund der Netzwerkfluss-Heuristik führten mit Dekomposition deutlich öfter zu einer Lösung als ohne Dekomposition.

In den Abbildungen 5.17(b) und 5.17(a) ist eine Darstellung der Rechenzeiten getrennt nach gelösten und ungelösten Nominierungen zu sehen. In Abbildung 5.17(c) ist der Verlauf der Rechenzeiten der 28 Expertenominierungen dargestellt. Die maximale Rechenzeit aller Instanzen beträgt auf dem L-Gas-Netz unter Verwendung des Dekompositionsansatzes 2946 s (ca. 49 min), was einer Verbesserung in der maximalen Rechenzeit gegenüber der Nichtnutzung des Dekompositionsansatzes um 16,7 % entspricht.

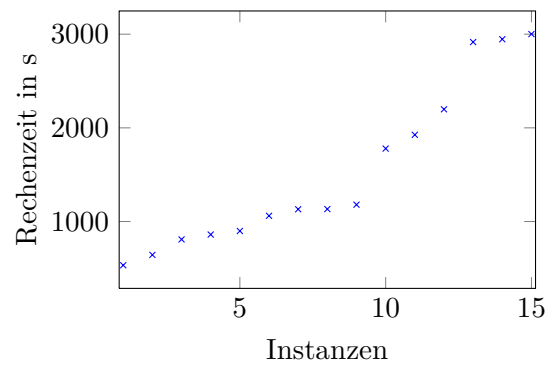
In Abbildung 5.18 ist die Aufteilung der genutzten Fixierungen auf die gelösten Nominierungen zu sehen. Es wurden die gleichen acht Konfigurationen getestet wie bei den L-Gas-Netz Rechnungen ohne Verwendung der Dekomposition.

Anzahl der gelösten Nominierungen	Binärentscheidungen fixiert durch	Zweiter Löser IPOPT benötigt	Anzahl der ungelösten Nominierungen
8	Netzwerkfluss-Heuristik	8	15
5	Konfigurationsbibliothek	3	

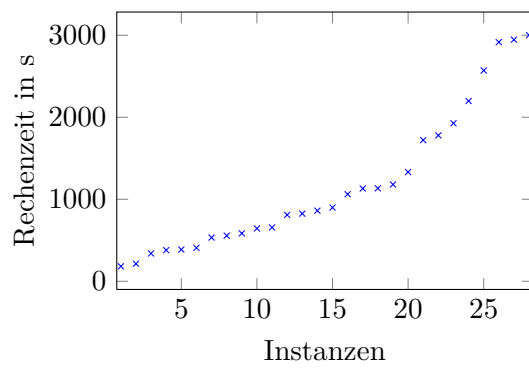
Tabelle 5.5.: Ergebnisübersicht



(a) Rechenzeiten aller Instanzen mit gefundenen Lösungen.



(b) Rechenzeiten aller Instanzen ohne Lösung.



(c) Rechenzeiten aller Instanzen.

Abbildung 5.17.: Auswertung der Rechenzeit.

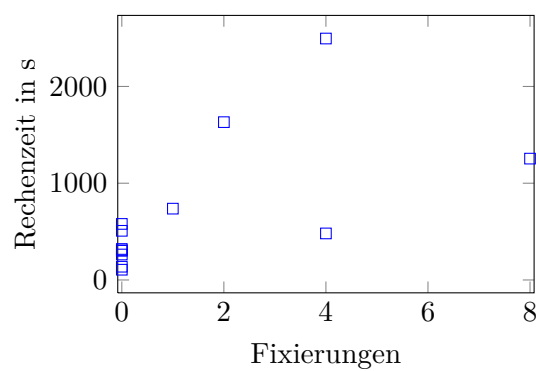


Abbildung 5.18.: Auswertung der genutzten Fixierungen bei zulässiger Nominierung.

5.3.4. Zusammenfassung

Auf dem H-Gas-Nord-Netz liegen uns sowohl Expertennominierungen, als auch aus statistischen Szenarien ergänzte Nominierungen vor. Es ist daher möglich einen Vergleich der Ergebnisse beider Nominierungstypen durchzuführen. Von den Expertennominierungen konnten 20 % nicht gelöst werden. Bei den ergänzten Nominierungen konnten nur 2,86 % nicht gelöst werden. Dies lässt sich durch die in Abschnitt 5.2 vorgestellten Unterschiede bei der Erstellung der Nominierungen begründen. Expertennominierungen sind tendenziell schwieriger zu lösen, weil sie so erzeugt wurden, dass extreme Flusssituationen im Netz modelliert werden. Mit Hilfe der Netzwerkfluss-Heuristik konnten 87,71 % der ergänzten Nominierungen gelöst werden, aber nur 57,5 % der Expertennominierungen.

Die Anzahl der Konfigurationen spielt eine entscheidende Rolle bei der Rechenzeit der Nominierungen ohne zulässige Lösung, da diese mit allen Konfigurationen getestet wurden. Die Reihenfolge der Konfigurationen ist zusätzlich von Bedeutung für die Rechenzeit bei gelösten Nominierungen. In den zu Abbildung 5.9 gehörenden Rechnungen auf dem H-Gas-Nord-Netz mit Expertennominierungen ist die Reihenfolge der Konfigurationen so gewählt, dass die zuerst getesteten Konfigurationen zu zulässigen Nominierungen führen. Eine Sortierung dieser Art reduziert die Rechenzeiten der gelösten Nominierungen. In den zu Abbildung 5.14 gehörenden Rechnungen führen alle Konfigurationen zu zulässigen Nominierungen. Daher ist der Unterschied in den Rechenzeiten zwischen zulässigen Nominierungen und solchen ohne zulässige Lösung im H-Gas-Süd-Netz nicht so deutlich wie bei den Expertennominierungen auf dem H-Nord Netz.

Für einen Vergleich der Rechenzeiten für unterschiedliche Netze betrachten wir die durchschnittliche Rechenzeit für eine zulässige Instanz mit Fixierung aus der Netzwerkfluss-Heuristik. Auf dem H-Gas-Süd-Netz beträgt diese 60s. Bei den aus statistischen Szenarien ergänzten Nominierungen auf dem H-Gas-Nord-Netz beträgt die durchschnittliche Rechenzeit bei Fixierungen aus der Netzwerkfluss-Heuristik 6s. Die deutlich unterschiedlichen durchschnittlichen Rechenzeiten lassen sich durch die in Abschnitt 5.1 erläuterten Größen- und Komplexitätsunterschiede beider Netze erklären.

Die Fixierung der Binärentscheidungen mit Hilfe der Netzwerkfluss-Heuristik führte in 14,12 % der Nominierungen auf dem H-Gas-Süd-Netz zum Erfolg. Im Vergleich dazu führte die Netzwerkfluss-Heuristik auf dem H-Gas-Nord-Netz bei den ergänzten Nominierungen in 87,71 % zu Lösungen. Ein Grund hierfür ist, dass es im H-Gas-Nord-Netz nur vier Stationen mit einer maximalen Anzahl an Entscheidungen von 53 gibt. Im H-Gas-Süd-Netz dagegen, gibt es 28 Stationen mit bis zu 75 Entscheidungen.

Das L-Gas-Netz ist unter den von uns betrachteten Netzen, das Netz mit den meisten Knoten, Kanten und Kreisen. Es hat zwar eine moderate Anzahl von Stationen, aber innerhalb einer Station 5832 verschiedene Entscheidungsmöglichkeiten für die schaltbaren Elemente. Für das L-Gas-Netz liegen uns nur Expertennominierungen vor. Schon auf dem vergleichsweise einfachen H-Gas-Nord-Netz haben wir gesehen, dass die Expertennominierungen schwierig zu lösen sind. So lässt sich begründen, dass wir ohne Dekomposition für 71,43 % der Expertennominierungen keine Lösung finden konnten. Durch den Dekompositionsansatz konnte diese Zahl bei sinkender maximaler Rechenzeit auf 53,57 % reduziert werden.

6. Einordnung in die Literatur

In der Literatur lassen sich zahlreiche Ansätze und Verfahren zur Lösung und Vereinfachung des nichtlinearen, nichtkonvexen Problems des Gastransports mit Binärentscheidungen finden. Als erstes wurden Gunbarrel-Netze¹ [71] mit dynamischer Programmierung gelöst. Später wurde dieses Verfahren auf Bäume angewandt [72] und mittels nichtsequenzieller dynamischer Programmierung auf Netze mit Kreisen ausgeweitet [7]. Verschiedene Linearisierungstechniken, durch die man aus einem nichtlinearen Problem mit Binärentscheidungen ein MIP formulieren kann, wurden auf alle Netztypen angewandt [37, 39]. Ein Ameisenkolonie-Algorithmus auf Gunbarrel-Netzen wurde als Heuristik zur Berechnung des Gastransports eingesetzt [9].

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns auf die stationäre Betrachtung des Gastransports konzentriert. Wir können nur wenige vereinfachende Annahmen an die Netztopologie und ihre Elemente stellen, weil ein Schwerpunkt dieser Dissertation in der Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung realer Gasnetze liegt. Mit diesem Verfahren sollen sowohl Schaltentscheidungen als auch Drücke an Knoten und Flüsse an Kanten realitätsnah bestimmt werden. Die realen Netze können über 100 Kreise beinhalten und auf den meisten Kanten ist sowohl Vorwärts- als auch Rückwärtsfluss erlaubt. Es gibt neben Rohren auch Verdichterstationen, Schieber, automatisierte Regler, Stützregler und Widerstände, die von uns modelliert werden müssen. Zusätzlich gibt es Gruppen von Schiebern, automatisierten Reglern und Verdichterstationen, deren Binärentscheidungen nicht in jeder beliebigen Kombination auftreten können. Diese Gruppen nutzen wir in unserer Netzwerkfluss-Heuristik zur Bestimmung der Binärentscheidungen.

Ein besonderer Fokus der folgenden Literaturrecherche liegt auf der Größe und auf den betrachteten Kantentypen der den Veröffentlichungen zu Grunde liegenden Netzen.

Die ersten Erfahrungen von Mathematikern mit der komplexen Frage der Steuerung eines Gasnetzwerks, findet man in [71] von P. J. Wong und R. E. Larson aus dem Jahr 1968. Hauptziel ihrer Arbeit ist die Minimierung der Kosten für das von Verdichterantriebsmaschinen benötigte Gas. Es werden optimale Drücke für die Verdichterausgänge berechnet. Mittels dynamischer Programmierung wird eine vorgegebene Menge von diskreten Drücken getestet. Dieses Verfahren garantiert globale Optimalität bezogen auf die diskreten Drücke, obwohl das System aus Zielfunktion und Nebenbedingungen aus nichtlinearen, nichtkonvexen Funktionen besteht. Das von Wong und Larson betrachtete Gasnetz besteht aus Knoten, Rohren und Verdichtern. Auf Rohren wird die quadratische Druckabfallsgleichung (Weymouth-Gleichung) $p_u^2 - p_v^2 = C \cdot q_{(u,v)}^2$ zur Modellierung der Druckveränderung im Rohr genutzt. Der Faktor C ist konstant und modelliert die Rohreigenschaften. Mit Hilfe einer Potenzfunktion mit dem Verhältnis aus Ausgangs- und Eingangsdruck als Basis wird der Verbrauch von Antriebsgas abgebildet. Einschränkung an die Möglichkeit einer Verdichterstation ist, dass das Druckverhältnis

¹Netze mit Baumstruktur, welche aus genau einem Ast bestehen.

aus Ausgangs- und Eingangsdruck ein vorgegebenes Intervall nicht verlassen darf. Die Verdichter können beliebig kleine Gasflüsse verdichten. Beispielrechnungen werden auf Gunbarrel-Netzen durchgeführt. Der Ansatz der dynamischen Programmierung wurde weiter ausgebaut und verfeinert, führte jedoch zu keinem Erfolg auf großen, vermaschten Netzen.

Y. H. Hamam und A. Brameller [25] stellen 1971 einen Ansatz zur Lösung von Elektrizitäts- und Gasnetzen vor, welcher auf den gleichen Grundideen beruht, die wir in unserer Arbeit nutzen. Das für den Gasfluss gültige erste Kirchhoffsche Gesetz der Flusserhaltung in jedem Knoten wird zur Formulierung von Bedingungen an den Gasfluss genutzt. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass der kumulierte Druckverlust bei Gasfluss durch einen beliebigen Kreis Null sein muss. Das genutzte Verfahren besteht aus mehreren Schritten. Zuerst wird ein Baum in dem Netz definiert und Flüsse sowie Drücke werden bei ausschließlicher Betrachtung des Baumes innerhalb des Netzes bestimmt. Anschließend werden die Fehler des Druckverlusts berechnet, welche auf den Nichtbaumkanten gemacht wurden. Nun berechnet man eine Fehlerminimierung auf einem dem Gasnetz entsprechenden Elektrizitätsnetz. Die letzten beiden Schritte werden iterativ wiederholt. Die Weymouth-Gleichung mit konstantem Faktor für Flussvariablen wird zur Bestimmung des Druckverlusts über ein Rohr genutzt. Schaltbare², durch Binärvariablen modellierte Elemente gibt es nicht. Die betrachteten Gasnetze sind Versorgungsnetze geringer Druckstufen, bei denen man von Quellen mit festgelegtem Druck ausgeht. Es werden reale Netze, bis zu einer Größe von 1260 Rohren und 345 Kreisen³, berechnet. Dieser Ansatz führte zu einem kommerziellen Programm für die britische North-Western Gas Behörde. Das Gebiet, welches durch sie mit Gas versorgt wurde entsprach ca. einem Zwölftel Großbritanniens.

1975 erweitern H. I. Zimmer, M. H. Boswell und E. E. Gemoets [72] den Ansatz der dynamischen Programmierung auf drei Phasen der Analyse eines Gasnetzes. Diese drei Phasen beziehen sich auf unterschiedliche Schwerpunkte der Betrachtung eines Gasnetzes. Mögliche Netzausbauten für Situationen mit maximalem Gasfluss werden ebenso untersucht, wie die Frage, ob dieses ausgebaute Netz auch geringere Normvolumenströme transportieren kann. Die Fragestellung ist sehr interessant, weil aus einem gefundenen, zulässigen Gasfluss nicht folgt, dass jeder pro Senke und Quelle kleinere Gasfluss, ebenfalls zulässig ist. Unterstützt wurden diese Untersuchungen von der El Paso Natural Gas Company [17], welche für den Gastransport in Arizona, New Mexico und in Teilen Texas zuständig ist. Verdichterstationen werden mit ihrem Kennfeld und ihren Verdichterantriebsmaschinen betrachtet. Mit der vorgestellten Methode ist es möglich, Netzwerke zu berechnen, welche eine Baumstruktur besitzen.

Eine detaillierte Monographie von A. J. Osiadacz [47] über die Simulation und Analyse von Gasnetzwerken erschien 1987. Er beschreibt die Grundlagen der Gasdynamik in Netzen sowie das Verhalten von Verdichterstationen und Reglern. Verschiedene Formulierungen von Zustandsgleichungen bei unterschiedlichen zu Grunde liegenden Annahmen über z. B. den vorherrschenden Druck werden diskutiert. Des Weiteren werden verschiedene Methoden zur Be-

²Verdichterstationen, automatisierte Regler und Schieber.

³Netzdaten der uns vorliegenden realen Netze siehe in Abschnitt 5.1.

rechnung der Drücke und Flüsse mit Hilfe der Zustandsgleichungen für die Druckveränderung in Rohren vorgestellt. Dies sind z. B. die sogenannte Newton-Knoten Methode und die Newton-Kreis Methode.

Für Gasnetze in Indien wurde 1990 dynamische Programmierung zur Optimierung des Gas-transportes genutzt. Das Ziel von H. S. Lall und P. B. Percell [35] ist die Berechnung einer optimalen Steuerung der Verdichterstationen. Dies beinhaltet neben dem Ausgangsdruck auch die Anzahl der pro Verdichterstation arbeitenden Verdichter. Im Gegensatz zu den Verdichterstationen, die unseren Rechnungen zu Grunde liegen, ist es bei Lall und Percell nur möglich, pro Verdichterstation mehrere Verdichter gleicher Bauweise in Parallelbetrieb zu nutzen. Es gibt eine eindeutige Quelle⁴ und mehrere Senken. Es wird eine Binärvariable pro Verdichterstation eingeführt, welche entscheidet, ob die Station im Bypass⁵ ist oder im festgelegten Parallelbetrieb verdichtet. Die Struktur der Netze ist theoretisch bereits auf Bäume reduziert. In der Praxis wird lediglich von Rechnungen auf einem Baum berichtet, welcher genau einen Ast besitzt.

Eine Veröffentlichung von J. Mallinson und A. E. Fincham, welche den gleichen Ansatz der Variablenelimination verfolgt, den wir in der vorliegenden Arbeit als Grundlage nutzen, ist 1993 [38] erschienen. Wie das Verfahren von Hamam und Brameller wird die Arbeit von Mallinson und Fincham auf Netzen getestet, welche auf dem britischen Gasnetz⁶ basieren. Im Gegensatz zur älteren Arbeit von Hamam und Brameller spezialisiert man sich hier auf Transportnetze mit Verdichterstationen und Reglern, welche durch nichtlineare Nebenbedingungen modelliert werden. Es wird ein Vergleich zwischen der Methode der Variablenreduktion und einem Algorithmus bei voller Variablenzahl getroffen. Bei kleinen Netzen benötigt die Methode der Variablenreduktion im Vergleich weniger Rechenzeit. Bei größeren Netzen benötigt die Methode der Variablenreduktion jedoch einen guten Startpunkt, um das Problem lösen zu können. Das vollständige „National Gas Transmission System“ besteht aus 199 Rohren, 17 Verdichterstationen, vier Reglern und elf Quellen. Dieses kann mit der in der Veröffentlichung vorgestellten Methode ohne Variablenreduktion berechnet werden. Die Methode der Variablenreduktion kann nicht alle Instanzen auf diesem Netz lösen.

1998 stellt Carter [7] ein Verfahren der nichtsequenziellen dynamischen Programmierung zur Berechnung von Netzen mit Kreisen vor. Es verkürzt die Rechenzeit gegenüber dem hierarchischen Ansatz deutlich und garantiert globale Optimalität auf dem diskretisierten Raum. Grundidee der nichtsequenziellen dynamischen Programmierung ist es, bestimmte Komponenten des Netzes zu einer virtuellen Komponente zusammenzufassen und dieses Verfahren iterativ zu wiederholen.

Von 1999 bis 2005 stellt R. Z. Ríos-Mercado in Zusammenarbeit mit verschiedenen Autoren Verfahren zum Thema Gastransport vor. Unter anderem verfolgt er, ebenso wie wir, den Ansatz

⁴Gasfeld an der Westküste Indiens.

⁵Die Verdichterstation wird ohne Druckerhöhung durchströmt.

⁶Britisch Gas National Transmission System.

der Variablenreduktion und stellt einen Beweis zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Systems der Druckgleichgewichte auf allen Kreisen im Netz vor.

In [52] wird eine Methode zur Relaxierung des Summenkennfelds einer Verdichterstation sowie der Zielfunktion (Minimierung des Antriebsgases) vorgestellt. Es wird die Annahme getroffen, dass in jeder Verdichterstation nur parallele Verdichter gleicher Bauart vorkommen. Die Anzahl der Verdichter pro Station wird jeweils durch eine ganzzahlige Variable ausgedrückt. Mit dieser Methode können Netze der Größenordnung drei Verdichterstationen, zehn Knoten und sechs Rohre gelöst werden. Für die Größenordnung acht Verdichterstationen, 48 Knoten, 43 Rohre können lediglich untere Schranken bestimmt werden. Der entscheidende Unterschied der beiden Netze ist nicht die Anzahl an Rohren und Knoten, sondern das Hinzukommen von Kreisen und damit von Flussvariablen.

In [53] und [54] wird ein Beweis zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des folgenden Systems vorgestellt:

$$\begin{cases} Aq &= b, \quad b \text{ fest} \\ A^\top p^2 &= \phi q|q|. \end{cases}$$

Der Vektor b entspricht festen Ein- und Ausspeisungen. A ist die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix, q ist der Flussvektor und ϕ sind positive Druckabfallskoeffizienten. Der Druck an einem Wurzelknoten ist fixiert. Eine weitere Bedingung ist, dass das Netz ausschließlich aus Knoten und Rohren besteht. Die obere Gleichung besagt, dass die Summe der Volumenflüsse über inzidente Kanten in jedem Knoten gleich dem ein- oder ausgespeisten Fluss an diesem Knoten ist⁷. Das untere Gleichungssystem beschreibt je Zeile die Druckveränderung in einem Rohr. In Kapitel 3.2 stellen wir einen alternativen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für Lösungen mit Hilfe von koerziven Operatoren vor, bei dem wir auch eine mögliche Behandlung aktiver Elemente betrachten. Aufgrund der Existenz und Eindeutigkeitsaussage von Lösungen stellt R. Z. Ríos-Mercado eine Methode der Netzwerkreduktion vor, bei der alle Gebiete zwischen Verdichterstationen zu einem Knoten geschrumpft werden. Ist der reduzierte Graph ein Baum, so sind die Flüsse über die Verdichterstationskanten fixiert und nach dem Eindeutigkeitsbeweis⁸ auch die Flüsse in den Untergraphen ohne Verdichterstationen. Alle Drücke in den Untergraphen werden durch den Druck an jeweils einem Referenzknoten pro Untergraph bestimmt. Als Referenzknoten werden Eingangs- oder Ausgangsknoten von Verdichterstationen gewählt. Man kann nun den Druck an jedem Knoten des Untergraphen in Abhängigkeit vom Referenzdruck berechnen. Die Druckgrenzen aller Knoten eines Untergraphen werden durch neu bestimmte Grenzen an den Referenzdruck eingehalten und die Zahl der Nebenbedingungen wird dadurch verringern. Hat der reduzierte Graph Kreise wird eine numerische Approximation durch Diskretisierung des Flusses vorgeschlagen. Diese Approximation kann funktionieren, wenn der reduzierte Graph wenig Kreise hat.

Um dieses Verfahren an den von uns zu lösenden Netzen anwenden zu können, müssten wir auch automatisierte Regler⁹ als trennende Elemente zulassen. In dem kleinsten von uns betrachteten Netz hat der reduzierte Graph bei Vernachlässigung von Rückwärtskanten jedoch schon acht Kreise. In dem größten Netz sind es bereits 154 Kreise. Die reduzierten Graphen

⁷Erstes Kirchhoffsches Gesetz.

⁸In jedem Kreis muss die Summe der Druckveränderungen über alle Kanten Null sein.

⁹Automatisierte Regler können genau wie Verdichterstationen aktiv den Druck verändern.

sind in Abschnitt 5.1.4 beschrieben. Beim Ermitteln der Anzahl der Kreise haben wir auf die Rückwärtskanten verzichtet, da sonst zusätzlich künstliche Kreise bestehend aus zwei Kanten gezählt würden.

In [51] wird eine konkrete Lösungsmethode für Netze vorgeschlagen, deren reduzierter Graph Kreise enthält. Die Methode besteht aus einem zweistufigen, iterativen Verfahren, bei dem abwechselnd Druckvariablen und Flussvariablen fixiert werden. Das Netz kann aus Knoten, Rohren und Verdichterstationen mit fixierter Verdichteranzahl bestehen. Binärvariablen werden nicht zur Modellierung verwendet. In der ersten Stufe werden die Flussvariablen fixiert und optimale Drücke mittels dynamischer Programmierung ermittelt. In der zweiten Stufe sind Druckvariablen fixiert und es wird unter Nutzung der Netzstruktur eine Gruppe von Flussvariablen gesucht und so verändert, dass diese Änderung die Zielfunktion¹⁰ verbessert. Gegenüber der älteren Methode der nichtsequenziellen dynamischen Programmierung werden mit diesem Ansatz auf Netzwerken mit bis zu vier Kreisen und 17 Verdichterstationen Verbesserungen in der Zielfunktion erzielt.

In [68] wird ein MINLP-Modell vorgestellt, bei dem die Anzahl der Verdichter pro Verdichterstation als ganzzahlige Variable modelliert ist. Die Flussrichtung über Rohre und Verdichterstationen wird als fixiert angenommen. Es werden nur Verdichter gleicher Bauart und in paralleler Konfiguration in Betracht gezogen.

Die in [68] von R. Z. Ríos-Mercado vorgestellten Methoden zur Berechnung von Netzen mit Kreisen benötigen einen zulässigen Startpunkt, um angewandt werden zu können. In [49] wird ein Verfahren zum Auffinden von Startpunkten vorgestellt. Es wird vorausgesetzt, dass die Flussrichtung über alle Kanten fixiert ist und dass es genau einen Verdichter pro Verdichterstation gibt. Grundidee des Ansatzes ist es, in der ersten Stufe eine zulässige Flussverteilung zu finden und in der zweiten Stufe zulässige Drücke zu konstruieren. Dazu werden Variablen Grenzen für den Eingangs-, den Ausgangsdruck und den Durchfluss der Verdichterstationen verschärft. Um eine zulässige Flussverteilung zu berechnen, werden sämtliche Wege zwischen allen Quellen und Senken bestimmt und es wird über diese Wege iteriert. Für das kleinste von uns betrachtete Netz mit 31 Quellen und 129 Senken würde dies bedeuten, dass es 3999 Paare von Quellen und Senken gibt mit mindestens¹¹ so vielen Verbindungen. Da das Netz nicht kreisfrei ist, gibt es Paare mit mehr als einer Verbindungsmöglichkeit. Neben der für das beschriebene Verfahren nötigen Einschränkung an das Netz ist diese hohe Zahl an Enumerationen ein Grund, warum der Ansatz auf den uns vorliegenden realen Netzen nicht anwendbar zu sein scheint.

D. De Wolf und Y. Smeers [12] nutzen stückweise lineare Approximationen, um z. B. eine Modifikation des belgische Gasnetzes zu berechnen. Das Netz besteht in der Modellierung aus Rohren, Knoten und Verdichterstationen. Letztere dürfen nur vorwärts durchströmt werden. Es gibt keine zu treffenden Binärentscheidungen. Es wird versucht diesen auf der Modifikation des belgischen Gasnetzes mit Baumstruktur erfolgreichen Ansatz, auf ein Teilnetz mit drei Kreisen des französischen Netzes auszuweiten.

¹⁰Minimierung des benötigten Gases für Verdichterantriebsmaschinen.

¹¹Unter der Annahme, dass es genau einen Verbindungsweg zwischen den Knoten gibt.

M. Westphalen [69] konzentriert sich in seiner Arbeit auf den stochastischen Aspekt im transienten Gastransport. Er untersucht die Unsicherheiten auf Seiten der Ein- und Ausspeisungen und löst das Problem mittels zweistufiger stochastischer Optimierung und grober Approximation der Nichtlinearitäten durch Ebenen.

M. Steinbach [16, 18, 63] modelliert das Gasflussproblem detailliert und führt eine Temperatur- und Gasbeschaffenheitsverfolgung durch. Verdichter und Verdichterantriebsmaschinen werden mit ihrem genauen Kennfeld abgebildet. Der Druckabfall auf Rohren wird durch Diskretisierung der den Druckabfall beschreibenden Differentialgleichungen modelliert. Dies ist nur bei fixierten Binärentscheidungen möglich und führt zu einem komplexen NLP. Auch der transiente Fall wird theoretisch behandelt.

Betrachtet man die Aufgabe des optimalen Gastransports ergibt sich ein nichtlineares, nicht-konvexes Problem mit Binärentscheidungen, welches man als MINLP modellieren kann. A. Martin und andere [37, 39] nutzen verschiedene Arten der Linearisierung und Schnittebenen-generierung, um diese MINLPs als MIPs zu formulieren und mit Standardlösern behandeln zu können.

Tennessees „Gas Pipeline’s Planning Department“ hat ein Optimierungstool entwickelt, welches die tägliche Arbeit mit Simulationstools ablösen soll [36]. Das angewandte Verfahren des Optimierungstools besteht aus drei Stufen. Zuerst wird eine nichtlineare Approximation der Verdichterstationen erzeugt. Mit dieser Approximation wird entschieden, welche Verdichterstationen an- oder ausgeschaltet werden. Danach wird mit einer genaueren Verdichterstationsmodellierung und der ermittelten Binärentscheidung die durch die Approximation erhaltene Lösung verfeinert. Es wird von erfolgreichen Rechenbeispielen auf Gunbarrel-Netzen berichtet.

In Norwegen wurde ein Tool [55] entwickelt, welches von GASSCO¹² und StatoilHydro ASA¹³ in der Kurz-, Mittel- und Langfristplanung erfolgreich angewandt wird. Schwerpunkte des Tools sind die Maximierung des transportierten Gasflusses und die Einhaltung vorgeschriebener Gasqualitäten. Die Flussrichtung wird als gegeben angenommen¹⁴ und Druckerhöhungen werden in der Zielfunktion minimiert. Die Druckabfallsgleichung¹⁵ wird mit Hilfe der ersten beiden Glieder einer Taylorreihe um den Eingangs- und den Ausgangsdruck approximiert.

In Algerien wurde 2009 die erste Bauphase der Pipeline GPL Hassi R’mel-Arzew abgeschlossen. Um diese mit möglichst geringen Kosten für das verbrauchte Antriebsgas betreiben zu können, entwickeln A. Chebouba [9] und andere einen Ameisenkolonie-Algorithmus. Der neu gebaute Netzabschnitt ist ein Gunbarrel-Netz, bei dem es in jeder Verdichterstation nur parallele, identische Verdichter gibt. Es werden Untersuchungen zu den Parametern des Algorithmus gemacht und Vergleichsrechnungen mit dynamischer Programmierung vorgestellt.

¹²Norwegisches Gastransportunternehmen.

¹³Norwegisches, im Erdölgeschäft tätiges Unternehmen mit Sitz in Stavanger. Der Name wurde im November 2009 zu Statoil ASA geändert.

¹⁴Es gibt theoretisch die Möglichkeit, sie variabel zu lassen.

¹⁵Weymouth-Gleichung.

R. Z. Ríos-Mercado und C. Borraz-Sánchez geben in [50] einen Überblick über einige bisher entwickelte Verfahren zum stationären und transienten Gastransport. Die verwendeten Netze werden in Transport- Verteil- und Sammelsysteme eingeteilt. Die in dieser Dissertation vorgestellten realen Gasnetze beinhalten jeweils sowohl Transport- als auch Verteilsysteme.

A. Druckabfall

Bei der Herleitung des Druckabfallgesetzes nutzen wir [8, 26, 32] und [43]. Der reale, dynamische Gasvolumenfluss¹ kann durch nichtlineare, partielle Differentialgleichungen und reale Gase darstellende Gleichungen beschrieben werden. Die Differentialgleichungen sind die Kontinuitätsgleichung, die Impulsgleichung und die Energiegleichung. Die Energiegleichung modelliert den Wärmeaustausch des Gases mit der Umgebung, den Joule-Thomson-Effekt² und die Auswirkung von Höhenunterschieden auf die Eigenschaften des Gases. Wir betrachten in dieser Dissertationsschrift eine konstante Gastemperatur und in einer Ebene liegende Rohre. Diese Annahmen führen dazu, dass wir die Energiegleichung vernachlässigen können. Die Dynamik im Gasfluss entsteht durch sich mit der Zeit verändernde Ein- und Ausspeisungen. Wir betrachten den stationären Zustand, der sich einstellt, wenn die Ein- und Ausspeisungen als konstant über die Zeit angenommen werden. In den Differentialgleichungen führt die stationäre Betrachtung dazu, dass alle Ableitungen nach der Zeit konstant Null sind.

In folgender Tabelle werden die nur in diesem Abschnitt genutzten Variablen und Parameter aufgelistet³.

Bezeichnung	Beschreibung	Einheit
x	Variable für den Ort (auf dem Rohr)	m
t	Variable für die Zeit	s
$p(x, t)$	Variable für den Druck	bar
$q(x, t)$	Variable für den Normvolumenfluss	$\text{m}^3 \text{h}^{-1}$
$M(x, t)$	Variable für den Massenfluss	kg s^{-1}
$\rho(x, t)$	Variable für die Gasdichte	kg m^{-3}
$v(x, t)$	Variable für die Fließgeschwindigkeit	m s^{-1}
$A(x)$	Querschnitt des Rohres	m
$h(x)$	Höhe des Rohres	m
k	Integrale ^a Rauigkeit	m

^aZusammenfassung aller widerstandsbildender Anteile einer Rohrleitung wie z. B. Wandrauigkeit, Ablagerungen und Armaturen.

¹Wir betrachten den Volumenfluss unter Normbedingungen (Normvolumenfluss).

²Zusammenhang zwischen Druck- und Temperaturveränderung.

³Siehe Anhang C für die Beschreibung der Konstanten.

A.1. Die Kontinuitätsgleichung

Diese Gleichung beschreibt die Massenerhaltung. Die zeitliche Veränderung der Dichte wird mit der räumlichen Veränderung des Massenflusses verknüpft:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Da wir den stationären Fall betrachten ist der erste Term in (A.1) konstant Null und wir erhalten:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0.$$

Dies bedeutet, dass M konstant ist. Mit der Normgasdichte ρ_0 gilt der Zusammenhang $M = \rho_0 q$ und damit folgt, dass der Gasvolumenfluss⁴ q an jedem Ort konstant ist. Der Fluss ist also am Anfang und am Ende des Rohres identisch.

A.2. Die Gasgleichung

Folgende Standardgleichung setzt die Zustandsgrößen Druck, Temperatur und Gasdichte für ideale Gase in ein Verhältnis:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p z_0 T_0}{T p_0}. \quad (\text{A.2})$$

Wir wollen reale Gase betrachten und modifizieren dazu Gleichung (A.2). Wir führen den Kompressibilitätsfaktor $z(p, T)$ ein, welcher nichtlinear von Druck und Temperatur abhängt. Er stellt den Unterschied zwischen einem idealen und einem realen Gas dar, der hauptsächlich durch die Wechselwirkung der Gasteilchen zustande kommt. Ideales Gas hat einen Kompressibilitätsfaktor von eins. Wir erhalten als grundlegende Gleichung für reale Gase⁵:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p z_0 T_0}{z(p, T_m) T_m p_0}. \quad (\text{A.3})$$

Wir nutzen die AGA-Formel der „American Gas Association“, welche bis zu einem Druck von 70 bar eine gute Approximation des Kompressibilitätsfaktors ist:

$$z(p, T) = 1 + \left(\left(\frac{0,257}{p_c} - \frac{0,533 T_c}{p_c T} \right) \cdot p \right).$$

A.3. Die Impulsgleichung

Diese Gleichung beschreibt wie die Druckveränderung über ein Rohr von dem Massenfluss und den technischen Parametern des Rohres abhängt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + g \rho \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda(q) |v| v}{2D} \rho + \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.4})$$

⁴In unserem Modell betrachten wir den Volumenfluss q , nicht den Massenfluss M .

⁵Wir gehen von einer mittleren Temperatur T_m aus.

Der erste Term beschreibt die Änderung des Drucks im Ort. Der zweite Term beschreibt den Einfluss der Erdanziehungskraft bei geneigtem Rohr. Der dritte Term stellt die Reibungskraft dar und der vierte beschreibt die Änderung des Massenflusses über die Zeit. Der letzte Term entspricht dem Staudruck. Da wir den stationären Fall betrachten ist der Term $\frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial t}$ konstant Null. Da wir horizontale Rohre voraussetzen ist der Term $g\rho \frac{\partial h}{\partial x}$ konstant Null. Nach [70] trägt der Staudruck unter normalen Betriebsbedingungen weniger als einen Prozent zu der Summe aller Terme aus (A.4) bei. Wir vernachlässigen den Term $\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x}$ daher und erhalten eine Vereinfachung von (A.4):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda(q)|v|v}{2D}\rho. \quad (\text{A.5})$$

In unserem Modell betrachten wir nicht die Geschwindigkeit v als Variable, sondern den Volumenfluss q . Wir nutzen folgenden Zusammenhang zur Umrechnung:

$$v = \frac{\rho_0 q}{A\rho}. \quad (\text{A.6})$$

Setzen wir (A.6) in (A.5) ein erhalten wir:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda(q) \frac{\rho_0^2 |q| q}{A^2 2D\rho}. \quad (\text{A.7})$$

Zur weiteren Berechnung des Druckabfalls benötigen wir die Reynoldszahl Re , welche beschreibt, ob der Gasfluss laminar⁶ oder turbulent⁷ ist:

$$Re(q, D) = \frac{4\rho_0 q}{\pi\eta D}, \quad (\text{A.8})$$

wobei η die dynamische Viskosität des Gases ist. Der Normvolumenfluss kann in dem aus unserer Modellformulierung resultierenden Problem negativ werden, wenn Gas entgegen der im Netz angegebenen Kantenrichtung fließt. Bei der Berechnung der Reynoldszahl wird allerdings von einem positiven Normvolumenfluss ausgegangen. Daher modifizieren wir Gleichung (A.8) zu:

$$Re(q, D) = \frac{4\rho_0 |q|}{\pi\eta D}. \quad (\text{A.9})$$

Ein wichtiger Teil der Gleichung (A.5) ist der von der Reynoldszahl abhängige Rohrreibungswert λ . Die Gasvolumenflüsse, in den von uns betrachteten Netzen, sind typischerweise turbulent, sodass wir die implizite Colebrook-White-Formel als dafür beste Approximation für den Rohrreibungswert λ wählen. Wird die Reynoldszahl a priori geschätzt, kann eine explizite Näherung für λ angegeben werden. Wir nutzen die Hofergleichung:

$$\lambda(q) = \frac{1}{\left(2\log_{10}\left(\frac{4,518}{Re(q,D)}\log_{10}\left(\frac{Re(q,D)}{7}\right) + \frac{k}{3,71 \cdot D}\right)\right)^2}. \quad (\text{A.10})$$

⁶Strömung ohne Turbulenzen.

⁷Strömung mit Verwirbelungen.

Setzen wir (A.3) in (A.7) ein, erhalten wir:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda(q) \frac{\rho_0^2 |q| q z(p, T_m) T_m p_0}{A^2 2 D z_0 T_0 \rho_0} \quad (\text{A.11})$$

Für die Bestimmung des Kompressibilitätsfaktors gehen wir von einem mittleren Druck $p_m = \frac{1}{2} \{ \max(\underline{p}_u, \underline{p}_v) + \min(\bar{p}_u, \bar{p}_v) \}$ aus, welcher aus den Grenzen für den Eingangs- und Ausgangsdruck berechnet wird. Wir betrachten also einen mittleren Kompressibilitätsfaktor $z_m := z(p_m, T_m)$ und schreiben (A.11) als:

$$p \frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda(q) \frac{\rho_0^2 |q| q z_m T_m p_0}{A^2 2 D z_0 T_0 \rho_0} \quad (\text{A.12})$$

Durch Integration nach dem Ort folgt aus (A.12):

$$\int p \frac{\partial p}{\partial x} dx = \int -\lambda(q) \frac{\rho_0^2 |q| q z_m T_m p_0}{A^2 2 D z_0 T_0 \rho_0} dx \quad (\text{A.13})$$

Eine Stammfunktion von $p \frac{\partial p}{\partial x}$ kann mit Hilfe der Kettenregel als $\frac{1}{2} p^2$ bestimmt werden. Die Grenzen für das bestimmte Integral sind p_u für den Druck am Eingang des Rohres und p_v für den Druck am Ausgang des Rohres. Das Rohr hat eine Länge von L . Aus (A.13) folgt:

$$\begin{aligned} \int p \frac{\partial p}{\partial x} dx &= -\lambda(q) \frac{\rho_0^2 |q| q z_m T_m p_0}{A^2 2 D z_0 T_0 \rho_0} \int 1 dx \\ &\Rightarrow \\ \left[\frac{1}{2} p^2 \right]_{p_u}^{p_v} &= -\lambda(q) \frac{\rho_0^2 |q| q z_m T_m p_0}{A^2 2 D z_0 T_0 \rho_0} [x]_0^L \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{(p_v^2 - p_u^2)}{2} &= -\lambda(q) \frac{\rho_0^2 |q| q z_m T_m p_0}{A^2 2 D z_0 T_0 \rho_0} (L - 0) \\ &\Leftrightarrow \\ p_u^2 - p_v^2 &= \frac{\lambda(q) \rho_0 L z_m T_m p_0}{z_0 T_0 A^2 D} |q| q. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Aus der Darstellung (A.14) erhalten wir mit $A = \frac{\pi D^2}{4}$ die Beschreibung für den Druckabfallkoeffizienten $\phi := \phi(q)$:

$$\phi(q) = \frac{\lambda(q) \rho_0 L z_m T_m p_0}{z_0 T_0 D^5 \pi^2} \frac{16}{1}.$$

Damit wir den Koeffizienten ϕ in den Abschnitten 2.1 und 2.3 verwenden können, müssen alle Eingabedaten und Variablen in den richtigen Einheiten (m, s, kg, Pa oder Kombinationen dieser) vorliegen. Wir führen diese Umrechnungen an dem Koeffizienten ϕ durch. Rohrlängen geben wir in km an, was zu einer Umrechnung mit dem Faktor 10^3 führt. Als Einheit der Druckvariablen haben wir bar gewählt und rechnen für die Druckquadrate auf der linken Seite von (A.14) mit dem Faktor $\frac{1}{10^5} \frac{1}{10^5}$ um. Für die richtige Einheit von p_0 wird mit dem Faktor 10^5 umgerechnet. Die Umrechnung der Einheit der Normvolumenflussvariablen von $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$ in $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ führt zu einem Faktor $\frac{1}{60^2} \frac{1}{60^2}$. Wir erhalten zusammengefasst:

$$\phi(q) = \frac{\lambda(q) \rho_0 L z_m T_m p_0}{z_0 T_0 D^5 \pi^2} \frac{16 \cdot 10^5 10^3}{60^2 60^2 10^5 10^5} \quad (\text{A.15})$$

B. Approximationen

In diesem Abschnitt werden zuerst alle von uns betrachteten Netzelemente mit ihren Eigenschaften beschrieben. Anschließend geben wir für die Modellbildung getroffene Vereinfachungen an.

1. Rohr:



Das Gas fließt mit einem bestimmten Druck in ein Rohr hinein und verändert seinen Druck gemäß der physikalischen Gesetze. Die Herleitung der von uns gewählten mathematischen Abbildung der Physik, ist im Anhang A beschrieben. Die Druckveränderung im Rohr ist von folgenden Eigenschaften des Rohres abhängig:

- Anfangsknoten.
- Endknoten.
- Durchmesser.
- Länge.
- Rauigkeit.
- Steigung.

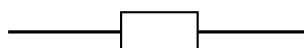
2. Kurzschluss:



Bei diesem Element ist der Druck am Anfangsknoten der gleiche wie am Endknoten. Dieses Element dient dem Gasnetzbetreiber oft als Hilfsmittel bei der Abrechnung, wenn zwei Gaskunden an dem gleichen physischen Knoten Gas in das Netz einspeisen oder aus dem Netz ausspeisen.

- Anfangsknoten.
- Endknoten.

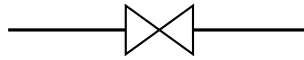
3. Widerstand:



Mit Hilfe eines Widerstands wird Druckverlust ausgedrückt, welcher in Messanlagen oder bei dünnen, kurvenreichen Rohrverzweigungen in einer Station entsteht. Es gibt konstanten Druckverlust durch einen Widerstand oder Druckverlust, welcher von dem durchströmenden Gasfluss und dem Eingangsdruck abhängt. Die Modellierung von Widerständen wird in Abschnitt 2.2.4 beschrieben.

- Anfangsknoten.
- Endknoten.
- Konstanter Widerstandsbeiwert.
- Durchfluss und druckabhängiger Widerstandsbeiwert.

4. Schieber:



Ein Schieber besitzt zwei Schaltzustände. Wenn er geöffnet ist, ist der Druck am Anfangsknoten gleich dem Druck am Endknoten und das Gas kann hindurchfließen. Wenn er geschlossen ist, kann kein Gas durch den Schieber strömen und die Drücke der Anfangs- und Endknoten sind entkoppelt.

- Anfangsknoten.
- Endknoten.
- Schaltzustand: Geöffnet oder geschlossen.

5. Regler:

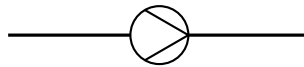


Dieses Element kann den Druck des Gases verringern, wenn er vorwärts durchströmt wird. Der im Symbol dargestellte Regler hat links seinen Anfangsknoten und rechts seinen Endknoten. Eine Druckregulierung ist im Betrieb des Netzes z.B. nötig, um Gas aus verschiedenen Leitungen zusammenzuführen oder wenn ein nachgelagerter Netzbetreiber nur einen bestimmten Maximaldruck akzeptiert. Wird ein Regler gegen seine Richtung durchströmt, was erlaubt sein kann aber nicht muss, verändert sich der Druck des Gases nicht. Diese Fahrweise wird Bypass genannt. Es gibt zwei Typen von Reglern. Automatisierte Regler können das Gas auf einen beliebigen Druck, der kleiner als der Eingangsdruck ist regeln. Ihre Umsetzung im Modell wird in Abschnitt 2.2.2 beschrieben. Stützregler regeln immer auf den gleichen Enddruck, wenn dies möglich ist, und werden in 2.2.3 behandelt.

- Typ: Stützregler, Automatisierter Regler.
- Anfangsknoten.

- Endknoten.
- Schaltzustand: Geöffnet oder geschlossen.
- Für Stützregler: Geforderter Ausgangsdruck.
- Eingangswiderstand.
- Ausgangswiderstand.
- Gasvorwärmer.

6. Verdichterstation:



Die im Symbol dargestellte Verdichterstation hat links ihren Anfangsknoten und rechts ihren Endknoten. Gas fließt über Rohre von hohem zu niedrigem Druck. Es verliert beim Transport durch Reibung mit den Leitungswänden Druck und muss zum Weitertransport erneut verdichtet werden. Dies geschieht in Verdichterstationen, die aus mehreren, miteinander kombinierbaren Verdichtereinheiten bestehen. Zu einer Verdichtereinheit gehören ein Verdichter und eine Antriebsmaschine. Die gesamte Verdichterstation hat zwei Schaltzustände. Ist sie geschlossen, kann kein Gas hindurch fließen und der Anfangs- und Enddruck sind voneinander entkoppelt. Ist die Station geöffnet, kann sie entweder Gas verdichten, oder sie ist im Bypass. Ist sie im Bypassmodus kann Gas hindurch fließen, ohne dass sich der Druck verändert. Je nach Verdichterstation existiert der Bypassmodus entweder nur in Richtung der Verdichterstationskante oder auch entgegen dieser. Die Beschreibung der Nebenbedingungen für Verdichterstationen erfolgt in Abschnitt 2.2.1.

- Anfangsknoten.
- Endknoten.
- Schaltzustand: Geöffnet oder geschlossen.
- Eingangswiderstand.
- Ausgangswiderstand.
- Einzelne Verdichter mit (verschiedenen) Kennfeldern und ihren Antriebsmaschinen.
- Eine Liste an möglichen Konfigurationen, die angeben wie die Verdichtereinheiten miteinander kombiniert werden können.
- Gaskühler.

Im Folgenden werden von uns vorgenommene Vereinfachungen gegenüber dem realen Gasfluss und dem realen Netz angegeben:

1. Allgemeines:

- Wir gehen bei allen Ein- und Ausspeisungen von einem Normvolumenfluss q in m^3h^{-1} aus. Dies spiegelt die Realität nicht korrekt wider, da die Lieferanten und Abnehmer eine bestimmte Leistung P (in W) nominieren. An den Einspeisepunkten ist der Brennwert H (in Jm^{-3}) und die Gaszusammensetzung bekannt. Dort kann der Normvolumenfluss mit Hilfe des Brennwertes und der eingespeisten Leistung durch $q = \frac{P}{H}$ bestimmt werden. An allen Ausspeisepunkten betrachten wir für die Umrechnung einen gemittelten Brennwert über alle Brennwerte der Einspeisepunkte. Nach der Umrechnung der Leistung in Normvolumenfluss gehen wir von einem homogenen Gas im gesamten Netz aus. Durch diese Approximation gilt die Bilanzbedingung des Volumenflusses an jedem Knoten des Netzes¹.
- Die Fließgeschwindigkeit des Gases bleibt unberücksichtigt. Im realen Gasnetzbetrieb darf das Gas aus Lärmschutzgründen nicht mit mehr als etwa 20ms^{-1} durch die Leitungen strömen.
- Wir berücksichtigen keine Gastemperaturen. Im realen Gasnetzbetrieb darf das Gas nur Temperaturen im Intervall $[0^\circ\text{C}, 40^\circ\text{C}]$ annehmen.
- Wir vernachlässigen den Gasverbrauch der Verdichterantriebsmaschinen. Das benötigte Gas wird nicht wie in der Realität üblich aus dem Netz entnommen.

2. Rohr, Widerstand: (siehe Abschnitte A und 2.2.4)

- Wir gehen vom stationären Fall aus. Dies hat Auswirkungen auf den betrachteten Druckabfall beim Durchströmen eines Rohres.
- Wir vernachlässigen Höhendifferenzen eines Rohres, welche die Druckveränderung beim Durchströmen eines Rohres beeinflussen.
- Bei der Berechnung des Druckabfalls im Rohr wird der mittlere Druck mit Hilfe des minimal und maximal möglichen Eingangs- und Ausgangsdrucks berechnet:

$$p_m = \frac{1}{2} \{ \max(\underline{p}_u, \underline{p}_v) + \min(\overline{p}_u, \overline{p}_v) \}.$$
- Wir gehen bei der Berechnung des Druckabfalls im Rohr und im Widerstand von einer konstanten Gastemperatur aus.

3. Regler, Verdichter: (siehe Abschnitte 2.2.1, 2.2.2 und 2.2.3)

- Wir vernachlässigen Eingangs- und Ausgangswiderstände von Verdichterstationen und Reglern.
- Damit das Gas bei der Verdichtung nicht zu heiß wird, gibt es Gaskühler vor Verdichterstationen. Diese vernachlässigen wir ebenso wie Gasvorwärmer vor Reglern, welche verhindern, dass das Gas bei der Druckverminderung zu kalt wird.

¹Wollten wir die Mischung von Gasen mit unterschiedlichen Parametern betrachten, so würden unsere Modelle deutlich komplizierter werden. Die Bilanzbedingung in Normvolumenfluss an jedem Knoten wäre nicht weiter gültig. Das Gesamtvolumen nach der Mischung wäre kleiner als die Summe der Einzelvolumen.

- Wir betrachten eine Approximation über die Menge aller Kennfelder der Verdichter innerhalb einer Verdichterstation. Für jede Verdichterstation nutzen wir den minimalen und maximalen Durchfluss, die minimale und maximale Druckerhöhung sowie das minimale und maximale Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangsdruck über alle Konfigurationen als Nebenbedingungen.
- Wir vernachlässigen die Betrachtung der Verdichterantriebsmaschinen, welche weitere Restriktionen generieren.

C. Symbolverzeichnis

In der folgenden Tabelle sind Symbole, Parameter und Konstanten mit ihren Standardwerten aufgelistet sowie die verwendeten Variablen mit ihren Grenzen. Bei den skalaren Parametern, Konstanten und den Variablen sowie den Variablengrenzen sind die zugehörigen Einheiten angegeben.

Symbole und Parameter	
\tilde{G}^+	Beschreibung des vollständigen Netzes als gerichteter Graph
\tilde{V}	Menge aller Knoten in \tilde{G}^+
l	Anzahl der Knoten in \tilde{G}^+
\tilde{V}_-	Menge aller Senken in \tilde{G}^+
\tilde{V}_+	Menge aller Quellen in \tilde{G}^+
\tilde{V}_0	Menge aller inneren Knoten in \tilde{G}^+
E^+	Menge aller Kanten des vollständigen Netzes
E_{Ro}^+	Menge aller Rohre in \tilde{G}^+
E_{K}^+	Menge aller Kurzschlüsse in \tilde{G}^+
E_{W}^+	Menge aller Widerstände in \tilde{G}^+
E_{S}^+	Menge aller Schieber in \tilde{G}^+
E_{Re}^+	Menge aller automatisierten Regler in \tilde{G}^+
E_{SR}^+	Menge aller Stützregler in \tilde{G}^+
E_{VS}^+	Menge aller Verdichterstationen in \tilde{G}^+
\tilde{G}	Beschreibung des Netzes als gerichteter Graph nach dem Löschen der als geschlossen fixierten schaltbaren Elemente
E	Kanten des Netzes nach Löschen der geschlossenen schaltbaren Elemente
\tilde{b}	Vektor der Ein- und Ausspeisungen an allen Knoten \tilde{V} des vollständigen Netzes
\tilde{A}	Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix des Graph \tilde{G}
G	Beschreibung des Netzes nach Löschen der auf zu fixierten Kanten und nach Separierung des Wurzelknotens
V	Menge aller Knoten des Graph G (alle Knoten aus \tilde{G}^+ bis auf den Wurzelknoten)
E_{Ro}	Menge aller Rohre in G
E_{K}	Menge aller Kurzschlüsse in G
E_{W}	Menge aller Widerstände in G
E_{S}	Menge aller Schieber in G
E_{Re}	Menge aller automatisierten Regler in G
E_{SR}	Menge aller Stützregler in G

Symbole und Parameter	
E_{VS}	Menge aller Verdichterstationen in G
E_{AE}	Menge aller aktiven Elemente (Verdichterstationen, automatisierte Regler, Schieber) in G
V_{AE}	Menge aller Knoten in G , die inzident zu einem aktiven Element sind
k	Anzahl der Kreise in G
z	Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G
Θ	Nominierungsvektor für alle Quellen und Senken aus \tilde{V}
b	Vektor der Ein- und Ausspeisungen für alle Knoten in V
A	Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix des Graph G
A_B	Die zu den Baumkanten gehörenden Spalten von A
A_N	Die zu den Nichtbaumkanten gehörenden Spalten von A
ϕ_i	Druckabfallskoeffizient von Kante i
ϕ_N	Vektor aller Druckabfallskoeffizienten von Nichtbaumkanten
ϕ_B	Vektor aller Druckabfallskoeffizienten von Baumkanten
$\underline{\Delta}_e$ in bar	Minimaler Druckanstieg in Verdichterstation e
$\overline{\Delta}_e$ in bar	Maximaler Druckanstieg in Verdichterstation e
$\underline{\varrho}_e$	Minimales Druckverhältnis in Verdichterstation e
$\overline{\varrho}_e$	Maximales Druckverhältnis in Verdichterstation e
\hat{p}_e in bar	Solldruck eines Stützreglers e
ς_e in bar	Konstanter Druckverlust in Widerstand e
ξ_e	Widerstandsbeiwert des Widerstands e
D_e in m	Durchmesser des Widerstands e
D_e in m	Durchmesser eines Rohres e
L_e in km	Länge eines Rohres e
k_e in m	Rauigkeit eines Rohres e
G^{NF}	Für die Netzwerkfluss-Heuristik vereinfachtes Netz
V^{NF}	Menge aller Knoten von G^{NF}
E^{NF}	Menge aller Kanten von G^{NF}
E_{VS}^{NF}	Menge aller Verdichterstationen in G^{NF}
E_{Re}^{NF}	Menge aller automatisierten Regler in G^{NF}
E_S^{NF}	Menge aller Schieber in G^{NF}
$E_{Station}$	Die Menge aller Stationen in G^{NF}
E_{Sub}	Die Menge aller Unterknoten in G^{NF}
A^{NF}	Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix des Graph G^{NF}
$\mathcal{N}(i)$	Menge der aufspeisenden Stützregler des Stützreglergebiets
$\tilde{G}_{ \mathcal{N}(i) }^i$	Graph zum Stützreglergebiet i mit $\mathcal{N}(i)$ als Menge von Stützreglern
$\tilde{V}_{ \mathcal{N}(i) }^i$	Menge aller Knoten von $\tilde{G}_{ \mathcal{N}(i) }^i$
$E_{ \mathcal{N}(i) }^i$	Menge aller Kanten von $\tilde{G}_{ \mathcal{N}(i) }^i$
$b^i(\hat{q})$	Vektor aller Ein- und Ausspeisungen von $\tilde{G}_{ \mathcal{N}(i) }^i$. Die Flüsse \hat{q} über die Ausgangsknoten der Stützregler sind nicht fixiert.

Symbole und Parameter	
Y^i in $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$	Gesamt einzuspeisender Normvolumenfluss über die Stützregler in das Gebiet $\tilde{G}_{ \mathcal{N}(i) }^i$
\hat{p}_e in bar	Fixierter Ausgangsdruck an Stützregler e
\tilde{G}^-	Netz, dass sich nach herauschneiden aller Stützreglergebiete ergibt
\tilde{V}^-	Menge aller Knoten von \tilde{G}^-
E^-	Menge aller Kanten von \tilde{G}^-
\top	Der Operator transponiert eine Matrix
$-\top$	Der Operator transponiert und invertiert eine Matrix
ε	Kleine positive Zahl als Toleranz
$\mathbf{1}$	Ein jeweils in der Dimension passender Spaltenvektor, der in jeder Komponente eine Eins enthält
\mathbb{I}	Die Einheitsmatrix
Konstanten	
$p_0 = 1,01325$ bar	Normdruck
$T_0 = 273,15$ K	Normtemperatur Kelvin
$z_0 = z(p_0, T_0) = 1,005$	Kompressibilitätsfaktor unter Normbedingungen
$\rho_0 = 0,785 \text{ kg m}^{-3}$	Dichte des betrachteten Gases unter Normbedingungen
$p_c = 46,4512$ bar	pseudokritischer Druck
$T_c = 192,033$ K	pseudokritische Temperatur
$T_m = 283,15$ K	mittlere Gastemperatur
$\eta = 1,19 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$	Dynamische Viskosität des Gases
$g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$	Erdbeschleunigung
Variablen und ihre Grenzen	
\tilde{p}	Vektor der Druckvariablen für alle Knoten aus \tilde{V}
q_e in $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$	Normvolumenfluss über Kante e
\underline{q}_i in $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$	Mindestnormvolumenfluss über Kante i
\overline{q}_i in $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$	Maximalnormvolumenfluss über Kante i
q_N	Normvolumenflussvektor aller Nichtbaumkanten
q_B	Normvolumenflussvektor aller Baumkanten
d_i in bar	Druckdifferenzen aus den Quadraten der Ausgangs- und Eingangsdrücke über Kante i
d_N	Vektor der Druckdifferenzen aller Nichtbaumkanten
d_B	Vektor der Druckdifferenzen aller Baumkanten
p_i in bar	Druck an Knoten i
\underline{p}_i in bar	Mindestdruck an Knoten i
\overline{p}_i in bar	Maximaldruck an Knoten i
p_r in bar	Druck am Wurzelknoten
p_m in bar	Mittlerer Druck auf einer Kante
q_i^{NF} in $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$	Fluss über eine Kante i des vereinfachten Netzes G^{NF}
\overline{q}^{NF}	Vektor der maximal erlaubten Flüsse aller Kanten aus E^{NF}

Literaturverzeichnis

- [1] AGEB AG Energiebilanzen e.V. <http://www.ag-energiebilanzen.de/DE/daten-und-fakten/primaerenergieverbrauch/primaerenergieverbrauch.html>, Zugriffsdatum: 10.03.2014. Zitiert auf Seite 2.
- [2] BARON. <http://archimedes.cheme.cmu.edu/?q=baron>, Zugriffsdatum: 13.06.2014. Zitiert auf Seite 17.
- [3] M. Brokate. Nonlinear problems (partielle differentialgleichungen 2). *Vorlesungsskript*, 2012. Zitiert auf Seite 57.
- [4] Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe, Fachbereich B1.3. http://www.bgr.bund.de/DE/Themen/Energie/Downloads/Energiestudie_2013.pdf?__blob=publicationFile&v=5, Zugriffsdatum: 19.05.2014. Zitiert auf Seite 2.
- [5] Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe. <http://www.bgr.bund.de/DE/Themen/Energie/Downloads/Energiestudie-Kurzf-2011.html?nn=1542226>, Zugriffsdatum: 10.03.2014. Zitiert auf Seite 1.
- [6] Bundesministerium der Justiz, Verordnung über den Zugang zu Gasversorgungsnetzen. http://www.gesetze-im-internet.de/bundesrecht/gasnzv_2010/gesamt.pdf, Zugriffsdatum: 19.05.2014. Zitiert auf Seiten 3 und 4.
- [7] R. Carter. Pipeline optimization: Dynamic programming after 30 years. *Pipeline Simulation Interest Group, Conference Paper*, 1998. Zitiert auf Seiten 105 und 107.
- [8] G. Cerbe. *Grundlagen der Gasdynamik*. Carl Hanser Verlag München Wien, 2008. Zitiert auf Seiten 1, 7 und 113.
- [9] A. Chebouba, F. Yalaoui, A. Smati, L. Amodeo, K. Younsi und A. Tairi. Optimization of natural gas pipeline transportation using ant colony optimization. *Computers & Operations Research*, pages 1916–1923, 2009. Zitiert auf Seiten 105 und 110.
- [10] V. Chvátal. *Linear Programming*. W.H. Freeman and Company, 1983. Zitiert auf Seite 4.
- [11] CONOPT. <http://www.conopt.com/>, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 91.
- [12] D. de Wolf und Y. Smeers. The gas transmission problem solved by an extension of the simplex algorithm. *Management Sciences*, pages 1454–1465, 2000. Zitiert auf Seite 109.
- [13] N. Deo. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974. Zitiert auf Seiten 58 und 60.

- [14] DEUDAN. <https://www.open-grid-europe.com/cps/rde/xchg/SID-8B7DB53E-B3108685/open-grid-europe-internet/hs.xsl/2894.htm>, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 83.
- [15] Deutscher Wetterdienst. <http://www.dwd.de/>, Zugriffsdatum: 17.06.2014. Zitiert auf Seite 90.
- [16] K. Ehrhardt und M. C. Steinbach. Kkt systems in operative planning for gas distribution networks. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, pages 606–607, 2004. Zitiert auf Seite 110.
- [17] El Paso. <http://webapps.elpaso.com/PortalUI/DefaultB.aspx?TSP=EPNG>, Zugriffsdatum: 21.06.2014. Zitiert auf Seite 106.
- [18] K. Erhardt und M. C. Steinbach. Nonlinear optimization in gas networks. *ZIB-Report*, pages 139–148, 2005. Zitiert auf Seiten 16 und 110.
- [19] Finanzvergleich. <http://www.finanzvergleich.de/gas/liberalisierung-des-gasmarktes.html>, Zugriffsdatum: 18.01.2012. Zitiert auf Seite 2.
- [20] H. Friedl, R. Mirkov und A. Steinkamp. Modeling and forecasting gas flow on exits of gas transmission networks. *International Statistical Review*, pages 24–39, 2012. Zitiert auf Seite 91.
- [21] A. Fügenschuh, B. Geißler, R. Gollmer, C. Hayn, R. Henrion, B. Hiller, J. Humpola und T. K. et al. Mathematical optimization for challenging network planning problems in unbundled liberalized gas markets. *Energy Systems*, 2013/2014. Zitiert auf Seiten iv und viii.
- [22] GAMS. <http://www.gams.de/>, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 91.
- [23] Gas-Preis-Vergleich. <http://www.gas-preis-vergleich.com/geschichte-erdgas.php>, Zugriffsdatum: 18.01.2012. Zitiert auf Seite 1.
- [24] B. Geißler, A. Morsi und L. Schewe. A new algorithm for minlp applied to gas transport energy cost minimization. *Facets of Combinatorial Optimization*, pages 321–353, 2013. Zitiert auf Seite 77.
- [25] Y. M. Hamam und A. Brameller. Hybrid method for the solution of piping networks. *Proc. IEE*, pages 1607–1612, 1971. Zitiert auf Seite 106.
- [26] T. Heidenreich. Linearisierung in transienten optimierungsmodellen des gastransports. Diplomarbeit, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, 2002. Zitiert auf Seite 113.
- [27] H. Heitsch und W. Römis. A note on scenario reduction for two-stage stochastic programs. *Operations Research Letters*, pages 731–738, 2007. Zitiert auf Seite 91.

- [28] R. Henrion, C. Küchler und W. Römis. Discrepancy distances and scenario reduction in two-stage stochastic mixed-integer programming. *Journal of Industrial and Management Optimization*, pages 363–384, 2008. Zitiert auf Seite 91.
- [29] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. B.G. Teubner Stuttgart, 1995. Zitiert auf Seite 56.
- [30] Initiative ERDGAS pro Umwelt. <http://www.ieu.de/erdgas.html?popup=true&print=true&selectedCategoryTitle=Themen&selectedCategory=themen&selectedItemTitle=Erdgas>, Zugriffsdatum: 18.01.2012 2009. Zitiert auf Seite 3.
- [31] IPOPT. <https://projects.coin-or.org/Ipopt>, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 91.
- [32] T. Koch, D. Bargmann, M. Ebberts, A. Fügenschuh, B. Geißler, N. Geißler, R. Gollmer, U. Gotzes, C. Hayn, H. Heitsch, R. Henrion, B. Hiller, J. Humpola, I. Joormann, V. Köhl, T. Lehmann, R. Lenz, H. Leövey, A. Martin, R. Mirkov, A. Möller, A. Morsi, D. Oucherif, A. Pelzer, M. Pfetsch, L. Schewe, W. Römis, J. Rövekamp, M. Schmidt, R. Schultz, R. Schwarz, J. Schweiger, K. Spreckelsen, C. Stangl, M. Steinbach, A. Steinkamp, I. Wegner-Specht und B. M. Willert. *Evaluating Gas Network Capacities*. Book in preparation, 2014. Zitiert auf Seiten iv, 17 und 113.
- [33] T. Koch, H. Leovey, R. Mirkov, W. Römis und I. Wegner-Specht. Szenariogenerierung zur modellierung der stochastischen ausspeiselaen in einem gastransportnetz. *to appear in: Optimierung in der Energiewirtschaft, VDI-Berichte*, 2011. Zitiert auf Seite 91.
- [34] Gaspreise Vergleich. <http://www.kwh-preis.de/gas/gaspreise>, Zugriffsdatum: 18.01.2012. Zitiert auf Seite 2.
- [35] H. S. Lall und P. B. Percell. A dynamic programming based gas pipeline optimizer. *Analysis and Optimization of Sysytes; lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 123–132, 1990. Zitiert auf Seite 107.
- [36] M. Lloyd, J. VanZelfden, A. Brodsky und M. Tsai. Tennessee gas pipeline’s experience with optimization. *PSIG Annual Meeting*, 2006. Zitiert auf Seite 110.
- [37] D. Mahlke, A. Martin und S. Moritz. A mixed integer approach for timedependent gas network optimization. *Optimization Methods and Software*, pages 625–644, 2010. Zitiert auf Seiten 105 und 110.
- [38] J. Mallinson, A. E. Fincham, S. P. Bull, J. S. Rollet und M. L. Wong. Methods for optimizing gas transmission networks. *Annals of Operations Research*, pages 443–454, 1993. Zitiert auf Seite 107.
- [39] A. Martin, M. Möller und S. Moritz. Mixed integer models for the stationary case of gas network optimization. *Mathematical Programming*, pages 563–582, 2006. Zitiert auf Seiten 105 und 110.

- [40] M. Matsumoto und T. Nishimura. Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, pages 3–30, 1998. Zitiert auf Seite 90.
- [41] MEGAL. www.open-grid-europe.com/cps/rde/xchg/SID-E19288CD-8BC00B91/open-grid-europe-internet/hs.xsl/2892.htm, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 84.
- [42] METG. www.open-grid-europe.com/cps/rde/xchg/SID-8B7DB53E-B3108685/open-grid-europe-internet/hs.xsl/2896.htm, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 86.
- [43] M. Möller. Mixed integer models for the optimisation of gas networks in the stationary case. PhD thesis, Darmstadt University of Technology, 2004. Zitiert auf Seite 113.
- [44] NETG. www.open-grid-europe.com/cps/rde/xchg/SID-EB34AD61-9775AF34/open-grid-europe-internet/hs.xsl/2897.htm, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 86.
- [45] NETRA. www.open-grid-europe.com/cps/rde/xchg/SID-8B7DB53E-B3108685/open-grid-europe-internet/hs.xsl/2895.htm, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 83.
- [46] Open Grid Europe. <http://www.open-grid-europe.com>, Zugriffsdatum: 18.01.2012. Zitiert auf Seiten iv und viii.
- [47] A. Osiadacz. *Simulation and Analysis of Gas Networks*. E.& F.N. Spon Ltd, 1987. Zitiert auf Seite 106.
- [48] M. Pfetsch, A. Fügenschuh, B. Geißler, N. Geißler, R. Gollmer, B. Hiller, J. Humpola, T. Koch, T. Lehmann, A. Martin, A. Morsi, J. Rövekamp, L. Schewe, M. Schmidt, R. Schultz, R. Schwarz, J. Schweiger, C. Stangl, M. Steinbach, S. Vigerske und B. Willert. Validation of nominations in gas network optimization: Models, methods, and solutions. *Optimization Methods and Software*. Zitiert auf Seiten iv und viii.
- [49] R. Z. Ríos-Mercado und C. Borraz-Sánchez. A procedure for finding initial feasible solutions on cyclic natural gas networks. *Proceedings of NSF Design, Service and Manufacturing Grantees and Research Conference/SMU*, 2004. Zitiert auf Seite 109.
- [50] R. Z. Ríos-Mercado und C. Borraz-Sánchez. Optimization problems in natural gas transmission systems: A state-of-the-art survey. *Optimization and Analytics in the Oil and Gas Industry, International Series in Operations Research and Management Science*, noch nicht erschienen. Zitiert auf Seite 111.
- [51] R. Z. Ríos-Mercado, S. Kim und E. A. Boyd. Efficient operation of natural gas transmission systems: A network-based heuristik for cyclic structures. *Computers & Operations Research*, pages 2323–2351, 2006. Zitiert auf Seite 109.

- [52] R. Z. Ríos-Mercado, S. Wu, E. A. Boyd und L. R. Scott. Model relaxations for the fuel cost minimization of steady-state gas pipeline networks. *Mathematical and Computer Modelling*, page 197.220, 2000. Zitiert auf Seite 108.
- [53] R. Z. Ríos-Mercado, S. Wu, L. R. Scott und E. A. Boyd. Preprocessing on natural gas transmission networks. *Technical Report PISIS*, 200. Zitiert auf Seiten 58 und 108.
- [54] R. Z. Ríos-Mercado, S. Wu, L. R. Scott und E. A. Boyd. A reduction technique for natural gas transmission network optimization problems. *Annals of Operations Research*, pages 217–234, 2002. Zitiert auf Seiten 7 und 108.
- [55] F. Romo, A. Tomasgard, L. Hellemo, M. Fodstad, B. H. Eidesen und B. Petersen. Optimizing the norwegian natural gas production and transport. *Interfaces*, pages 46–56, 2009. Zitiert auf Seite 110.
- [56] M. Růžička. *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer, 2003. Zitiert auf Seite 50.
- [57] M. Schmidt, M. Steinbach und B. Willert. High detail stationary optimization models for gas networks – Part 2: Validation and results. In preparation. Zitiert auf Seiten iv und viii.
- [58] M. Schmidt, M. Steinbach und B. Willert. High detail stationary optimization models for gas networks — Part 1: Model components. IfAM Preprint 94, Inst. of Applied Mathematics, Leibniz Universität Hannover, 2012. Submitted. Zitiert auf Seiten iv und viii.
- [59] C. Schünemann. Regenerative Zukunft. www.regenerative-zukunft.de/fossile-energien-menu/erdgas, Zugriffsdatum: 19.05.2014. Zitiert auf Seite 1.
- [60] SIAM. www.siam.org, Zugriffsdatum: 14.06.2014. Zitiert auf Seiten iv und viii.
- [61] SIMONE Research Group and LIWACOM. <http://www.simone.cz/simone-company-about.asp>, Zugriffsdatum: 13.03.2014. Zitiert auf Seite 76.
- [62] SNOPT. http://www.sbsi-sol-optimize.com/asp/sol_product_snopt.htm, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 91.
- [63] M. C. Steinbach. On pde solution in transient optimization of gas networks. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pages 345–361, 2007. Zitiert auf Seite 110.
- [64] D. Stäcker. *Der liberalisierte europäische Gasmarkt*. DUV, 2004. Zitiert auf Seite 3.
- [65] J. Szabó. The set of solutions to nomination validation in passive gas transportation networks with a generalized flow formula. *ZIB-Report*, 2011. Zitiert auf Seite 51.
- [66] TENP. www.open-grid-europe.com/cps/rde/xchg/SID-E19288CD-8BC00B91/open-grid-europe-internet/hs.xsl/2893.htm, Zugriffsdatum: 14.03.2014. Zitiert auf Seite 85.

- [67] TOPTARIF. <http://www.toptarif.de/gas/gas-ratgeber/liberalisierung-des-deutschen-gasmarktes>, Zugriffsdatum: 18.01.2012. Zitiert auf Seite 2.
- [68] Y. Villalobos-Morales, D. Cobos-Zaleta, H. J. Flores-Villarreal, C. Borraz-Sánchez und R. Z. Ríos-Mercado. On nlp and minlp formulations and preprocessing for fuel cost minimization of natural gas transmission networks. *Proceedings of the 2003 NSF Design, Service and Manufacturing Grantees and Research Conference*, 2003. Zitiert auf Seite 109.
- [69] M. Westphalen. Anwendungen der stochastischen optimierung im stromhandel und gastransport. *Ph.D. thesis*, 2004. Zitiert auf Seite 110.
- [70] J. F. Wilkinson, D. V. Holliday, E. H. Batey und K. W. Hannah. Transient flow in natural gas transmission systems. *American Gas Association, New York*, 1964. Zitiert auf Seite 115.
- [71] P. J. Wong und R. E. Larson. Optimization of natural-gas pipeline systems via dynamic programming. *IEEE Transactions on automatic control*, pages 475–481, 1968. Zitiert auf Seite 105.
- [72] H. I. Zimmer, M. H. Boswell und E. E. Gemoets. Calculating optimum pipeline operations. *Pipelines in adverse environments: a state of the art; Proceedings/ASCE Pipeline Division*, pages 280–293, 1975. Zitiert auf Seiten 105 und 106.